『社会科学ジャーナル』31(2)〔1992〕pp.1-28
The Journal of Social Science 31(2)〔1992〕 ISSN 0454-2134

所得税税率構造の公平性

──所得限界効用の所得弾力性測定とその応用──

村上雅子[1]
浅野 哲
下野恵子

「所得が増加するにともない，公的な負担をどの程度に増加させることが公平であるか」という問題は，負担の増大しつつある租税や社会保障における重要な政策課題であるが，その程度を決定する根拠は十分明確にされていない。

小論は，所得限界効用の所得弾力性 ϕ の測定を行うことによって，所得税の公平な税率構造の決定に一つの根拠を与えることを試みる。ϕ 値が測定されるならば，所得税の分野のみならず，所得分配が変更されるさまざまな政策について，その厚生変化を判定する公平性の指標に具体的根拠を与えることにも応用できる。

所得限界効用の所得弾力性 ϕ の定義は，y を所得，$U'(y)$ を所得の限界効用とすると，

$$\phi=-\frac{\partial U'(y)}{\partial y}\cdot\frac{y}{U'(y)}>0$$

小論はⅠ節で，所得税理論における伝統的な均等犠牲説において，所得限界効用の所得弾力性 ϕ が税率構造の決定にもつ役割を示す。Ⅱ節において，ϕ の測定方法としてわれわれのとった3つのアプローチの第1，消費財需要理論による ϕ の測定理論と，測定結果を，Ⅲ節では，第2の方法，所得税税率構造に内在する ϕ の測定理論と，測定結果を，Ⅳ節に，第3の

方法としての余暇を含む拡張型消費需要関数による ϕ 測定理論を示す。そしてⅤ節に最適所得税理論，その他の分野における ϕ の応用可能性について言及する。

Ⅰ　均等犠牲説における税率構造の決定

J. S. Mill (1848), Pigou (1928), Frisch (1932), Brunner (1989) による均等犠牲説は，課税によって喪失する効用を犠牲として，納税者間に犠牲を均等にする税率構造を公平とみなした。３種の均等犠牲原則がある。T は所得税額，C, $\tilde{C}$, $\hat{C}$ は各原則において納税者間に均等にする定数。

(1)　均等絶対犠牲原則 (Equal Absolute Sacrifice, EAS)

$U(y)-U(y-T)=C$

(2)　均等比例犠牲原則 (Equal Proportional Sacrifice, EPS)

$[U(y)-U(y-T)]/U(y)=\tilde{C}$

(3)　均等限界犠牲原則 (Equal Marginal Sacrifice, EMS)

$U'(y-T)=\hat{C}$

EMS 原則は，課税後の所得限界効用を各人に均等にするのであるから，所得効用関数の同形性を仮定すれば，課税後の所得を同額にするまで再分配しなければならない。この極端なケースは除く。

EAS またはEPS原則をとるならば，累進税か比例税か逆進税かは，所得限界効用の所得弾力性 ϕ の大きさに依存している。Frisch (1932) が最も包括的な証明を与えているが，[2] 結論は

(1)　均等絶対犠牲 (EAS) 原則をとる場合：

$\phi>1 \Rightarrow$ 累進税，$\phi=1 \Rightarrow$ 比例税，$\phi<1 \Rightarrow$ 逆進税

(2)　均等比例犠牲 (EPS) 原則をとる場合：

$\phi>1 \Rightarrow Q<1 \longrightarrow (1-\tilde{C})\,Q<1$ なら，累進税

$\phi=1 \Rightarrow Q=1 \qquad (1-\tilde{C})\,Q=1$ なら，比例税

$\phi<1 \Rightarrow Q>1 \longrightarrow (1-\tilde{C})\,Q>1$ なら，逆進税

ここで，$Q=[U'(y)\cdot y]/[U'(y-T)\cdot(y-T)]$ また

$(1-C)=U(y-T)/U(y)$

ϕが1より大であれば，EAS, EPSいずれの原則でも累進税が帰結する。$(1-\tilde{C})$は必ず1より小であるから，EPS原則をとると，ϕが1または1より小であっても累進税が妥当な場合が生じる。均等犠牲説の理論家たちはFrischをのぞいてはϕを測定せずに，ϕが1より大か，小か，1に等しいかを仮定して，その結果を導出したにすぎない。

Ⅱ　消費財需要理論にもとづくϕの測定

所得制約のもとにおける効用最大化の消費者均衡において，ラグランジュ乗数λは所得の限界効用を表すが，この場合所得とは消費支出総額であり，このλの弾力性をϕとして測定する。効用関数の任意の単調変換によって，消費財需要量は変化しないが，ϕの値は変化する。したがってϕの一意的な値を得ようとすれば，ϕと，需要の価格弾力性，所得弾力性との間に一定の関係式を導出する必要がある。

直接効用関数または間接効用関数において，財の間に効用の加法的分離性(additive separability)があるならば，ϕと需要の価格弾力性e_{ii}所得弾力性η_iおよび当該財の支出比率S_iの間に，(2.1)～(2.3)のような関係式を導出することができる。直接効用関数が加法的分離性をもつとは，ある財の消費量の変化が，他財の限界効用に影響を与えないことである。間接効用関数が加法的分離性をもつとは，ある財の価格の変化が，他財の限界効用に影響を与えないことである。

(1)　直接効用関数が2種の財グループ間で加法的分離性をもつならば

$$\phi=\frac{\eta_i(S_i\eta_i-1)}{e_{ii}+S_i\eta_i}\qquad (2.1)\qquad \text{Frisch の }\phi\text{ 測定式}$$

(2)　直接効用関数がn種の財グループ間で加法的分離性をもつならば

$$\phi=\frac{1}{(e_{ji}/\eta_j)-(e_{ii}/\eta_i)}\qquad (2.2)\qquad \text{修正 }\phi\text{ 測定式}$$

(3)　間接効用関数がn種の財グループ間で加法的分離性をもつならば

$$\phi=\frac{e_{ii}+1-(1-S_i)\ \eta_i}{1-S_i}\qquad (2.3)\qquad \text{Deaton の }\phi\text{ 測定式}$$

(2.1) はFrisch (1959)によって証明されたので，Frischの測定式とよぶが，これは消費支出を2財グループ（例えば食料と非食料）に分割し，その間に加法的分離性を仮定した場合にのみ成り立ち，3財以上では成り立たない。2財ケースを含み，一般にn財グループに分割した場合に成り立つ式を村上（1992）が導出し，(2.2) の修正ϕ測定式とした。需要関数はしばしば間接効用関数から出発して導出され，その直接効用関数の明示的な形があきらかにできない場合がある。Deaton (1974)は間接効用関数が加法的分離性をもつ場合には，(2.3) 式が成り立つことを証明したので，これをDeatonのϕ測定式とよぶ。(2.2) および (2.3) の証明はそれぞれ付録の（命題1），（命題2）で示される。

1950年代から80年代にかけて計量的推定をともなって種々の需要関数の類型が提示されたが，その主要な8類型 — 線形支出体系，一般化された線形支出体系，非線形選好体系，限定的非線形選好体系，殆ど望ましい需要体系，間接トランスログ効用関数モデル，間接加法対数需要体系およびロッテルダムモデル — について，上記の (2.2) あるいは (2.3) 式によるϕの測定が可能であるかどうかを検討した。

線形支出体系(LES)の場合はその導出の基礎としての直接効用関数の形は明らかであり，それは (2.5) が示すように加法的分離性をもっている。しかしそれ以外の7類型は間接効用関数またはその逆関数としての支出関数の形を特定化して，そこから需要関数を導出している。間接効用関数V (y, p)の形が分かるから，ϕは

$$\phi=-\frac{\partial V'(y,p)}{\partial y}\frac{y}{V'(y,p)}>0 \qquad (2.4)$$

により，それぞれの需要関数体系について導出できるが，このϕ値は，間接効用関数の任意の単調変換によって変化し，一意ではない。各類型の基礎となった間接効用関数を対数変換してできるだけ加法的分離形に近付けても，間接加法対数需要体系(Addilog)以外の類型では間接効用関数の加法的分離性は成り立たないため，(2.3)を適用できないことがわかった。(3)

したがって，直接効用関数が加法的分離性をもつLES体系については(2.2)，間接効用関数が加法的分離性をもつAddilog体系には（2.3）を適用して一意的なϕの値を測定することができる。そしてLES体系，Addilog体系の場合，需要関数から求めた価格弾力性，所得弾力性，支出比率を代入した（2.2)，(2.3）によるϕは，間接効用関数から（2.4）式によって求めたϕ式（2.7)，(2.10）にそれぞれ理論的には一致する。

LES体系：

LESの需要関数は予算制約の下での効用関数最大化の結果として求められる。x_iはi財の需要量，γ_iはi財の最低必要量。Σはiについて合計。

$$\mathrm{Max.}\ U=\Sigma\beta_i\, ln\,(X_i-\gamma_i)\quad s.t.\ y=\Sigma p_i x_i \tag{2.5}$$

$$x_i=\gamma_i+(\beta_i/p_i)\,(y-\Sigma p_i\gamma_i)\qquad \text{需要関数} \tag{2.6}$$

$$\phi=y/(y-\Sigma p_i\gamma_i)>1 \tag{2.7}$$

Addilog体系：

間接効用関数からロワの恒等式により需要関数を求める。

$$V=\Sigma\alpha_i\,(y/p_i)^{\beta i}\qquad \text{間接効用関数} \tag{2.8}$$

$$x_i=\frac{\alpha_i\beta_i\,(y/p_i)^{\beta i+1}}{\Sigma\,\alpha_i\beta_i\,(y/p_i)^{\beta i}}\qquad \text{需要関数} \tag{2.9}$$

$$\phi=1-\Sigma\beta_i S_i\qquad \text{ただし}\quad S_i=p_i\,x_i/y \tag{2.10}$$

実際のϕの測定は，間接効用関数から(2.4)によって導出された(2.7)，(2.10）式を用いた。価格弾力性や所得弾力性を推定してϕ測定式（2.2)，(2.3）に代入する方法よりも推定の誤差が少なく，推定が容易だからである。まずLES, Addilogそれぞれの需要関数体系のパラメータを推定し，この値を（2.7)，(2.10）にそれぞれ代入して，ϕ値を算出した。

用いたデータはわが国の『家計調査年報』における「年間収入5分位階級別1世帯当り年平均1か月の収入と支出」（勤労者世帯，全国）であり，1970年代（1970～1979）と1980年代（1980～1989）を別々に推定した。消費支出は5費目分類を用いた。

(1) LES 需要関数の推定

LES の需要関数は

$$x_i=\gamma_i+(\beta_i/p_i)(y-\Sigma p_i\gamma_i) \quad (2.6)$$

であり，パラメータは $(\beta_1,\dots,\beta_5,\gamma_1,\dots,\gamma_5)$ である。

推定は，支出額による（2.11）と，支出比率による（2.12）の２種の推定式について行った。

$$p_ix_i=p_i\gamma_i+\beta_i(y-\Sigma p_i\gamma_i)+u_i \quad (2.11)$$

$$p_ix_i/y=[p_i\gamma_i+\beta_i(y-\Sigma p_i\gamma_i)]/y+u_i \quad (2.12)$$

(2.11)，(2.12) 共に共分散行列はホモスケダスティックと仮定されるが，(2.11) においては支出額の標準偏差を総支出に関わらず一定としているのに対し，(2.12) では総支出と比例関係となっている。より現実的な想定は（2.12）であろう。また，ここでのモデルはパラメータにつき非線形となっているため，攪乱項の正規性を仮定し最尤法での推定を行った。紙幅の制約のため（2.12）の支出比率による推定結果のみ表１に示した。

表１　線形支出体系推定結果
（支出比率による）

〔1970年代〕

	β	γ
食　料	0.1717 (26.83)	302.7 (15.44)
住　居	0.0764 (12.73)	80.0 (8.25)
光　熱	0.0239 (17.07)	32.1 (11.46)
被　服	0.1221 (32.13)	26.4 (2.02)
雑　費	0.6058 (76.68)	38.0 (0.62)

〔1980年代〕

	β	γ
食　料	0.1773 (26.86)	637.6 (18.75)
住　居	0.0200 (4.08)	240.5 (51.17)
光　熱	0.0372 (12.83)	134.7 (19.81)
被　服	0.1011 (36.11)	121.0 (6.37)
雑　費	0.6644(138.42)	919.2 (7.52)

（ ）内は t 値

(2) Addilog 需要関数の推定[4]

Addilog の需要関数の第 i 財と第 j 財の比率の対数をとると線形の推定式になる。

$$lnx_i-lnx_j=ln\alpha_i\beta_i-ln\alpha_j\beta_j+(1+\beta_i)ln\,(y/p_i)-(1+\beta_j)ln\,(y/p_j)+ln\varepsilon_{it}-ln\varepsilon_{jt},$$

ε_i は誤差項

記号を　$DF_i=lnx_i-lnx_j$, $C_i=ln\alpha_i\beta_i-ln\alpha_j\beta_j$, $\alpha_i=(1+\beta_i)$

$\beta=(1+\beta_j)$, $M_i=ln\,(y/p_i)$, $M_j=ln\,(y/p_j)$, $u_{it}=ln\varepsilon_{it}-ln\varepsilon_{jt}$

として，第 j 財を特定の財に固定すると推定式は

$$DF_i=C_i+\alpha_iM_i+\beta M_j+u_{it} \tag{2.8}$$

となる。固定する第 j財は，第 5 財（雑費）とした。βは（2.8）の 4 方程式全てにおいて同じ値をとるとの制約をおいて推定する。計算はSASの制約付きの線形同時方程式解法プログラムであるSYSLIN＋SURプロシジャーを用いた。M_i の係数は $(1+\beta_i)$ であるから，これより β_i を計算できる。

表 2　Addilog 体系の需要関数推定

70年代（1970～79年データ）

1.	食　料	$DF_1=6.0344+0.1255M_1+0.9897M_5$	$\beta_1=-0.8745462$
		(29.9)　(1.76)　(14.86)	$\beta_2=-0.6932560$
2.	住　居	$DF_2=3.5890+0.3067M_2+0.9897M_5$	$\beta_3=-0.7509598$
		(8.29)　(3.57)　(14.86)	$\beta_4=-0.1806312$
3.	光　熱	$DF_3=2.9901+0.2490M_3+0.9897M_5$	$\beta_5=-0.0103201$
		(18.5)　(3.66)　(14.86)	
4.	被　服	$DF_4=-0.2189+0.8194M_4+0.9897M_5$	$R^2=0.9654$
		(0.65)　(10.28)　(14.86)	（ ）内は t 値

80年代(1980 ～89年データ)

1.	食　料	$DF_1=4.8704+0.34646M_1+1.03578M_5$	$\beta_1=-0.6535367$
		(23.15)　(4.15)　(13.99)	$\beta_2=-1.0635109$
2.	住　居	$DF_2=7.0171-0.06351M_2+1.03578M_5$	$\beta_3=-0.6132981$
		(19.71)　(0.82)　(13.99)	$\beta_4=0.1817160$
3.	光　熱	$DF_3=2.9947+0.38670M_3+1.03578M_5$	$\beta_5=0.0357790$
		(10.31)　(6.14)　(13.99)	
4.	被　服	$DF_4=-3.1414+1.18172M_4+1.03578M_5$	$R^2=0.9153$
		(9.76)　(14.43)　(13.99)	（ ）内は t 値

(3) LES および Addilog 需要関数推定にもとづく ϕ 値

LESの需要関数推定によって得られた表1の γ_i を用い，(2.7) によって ϕ を推定する。各年，各分位階層別に推定した ϕ 値は，表3の示すように高所得の分位になるにしたがってやや低下する傾向がどの年にもみられる。70年代についての ϕ 推定値は2.0から1.2の範囲にある。50個の ϕ の単純平均を求めると、

LES 需要関数にもとづく ϕ 推定値は，70年代の場合

支出額の推定結果によると　　$\phi=1.4303$

支出比率の推定結果によると　　$\phi=1.4937$

Addilog の需要関数推定によって得られた β_i を用い，(2.10) によって ϕ を推定すると，年別，分位別の ϕ 値は，表4の示すようにやはり高所得の分位になるほど ϕ のやや下がる傾向は見られるが，1.5から1.3の範囲にある。50個の ϕ の平均値を求めると

Addilog 需要関数にもとづく ϕ 推定値は

70年代　$\phi=1.4009$　　80年代　$\phi=1.2906$

したがって，効用関数に加法的分離性を仮定した消費財需要関数にもとづく ϕ の推定値は，LES 体系の推定にもとづく80年代の結果を別とすれば，ほぼ1.3～1.4程度の値になる。1％の所得（消費支出総額）の増加は，1.3～1.4％の所得限界効用の低下をもたらすことを意味し，これはI節で述べたように均等犠牲原則によって課税するならば，EAS原則でも，EPS 原則でも累進所得税を妥当とする ϕ 値である。

問題はLES 体系にもとづく場合の80年代のケースである。極めて大きな ϕ 値が推定されており，第1分位では負の ϕ 値になっている。その原因については未だ十分解明できていないが，LES体系のパラメータ推定において，80年代の γ は70年代に比べ，かなり大きな値を示していることからもうかがわれるように，かなり選好の変化があったか，LES体系では説明できない要因が働いていたためかもしれない。

表3　線形支出体系による ϕ の推定値

1970年代（支出比率の推定結果より）

年	第1分位	第2分位	第3分位	第4分位	第5分位
70	2.0485	1.6618	1.5367	1.4357	1.3084
71	1.9279	1.6181	1.5003	1.4049	1.2914
72	1.8488	1.5631	1.4622	1.3798	1.2767
73	1.6955	1.5053	1.4220	1.3423	1.2515
74	2.0182	1.6077	1.4758	1.3725	1.2208
75	2.1147	1.6030	1.4619	1.3599	1.2072
76	1.8056	1.5425	1.4360	1.3463	1.2445
77	1.6853	1.4890	1.4101	1.3399	1.2503
78	1.6802	1.4997	1.4006	1.3346	1.2432
79	1.5983	1.4454	1.4046	1.3542	1.2538

1980年代（支出比率の推定結果より）

年	第1分位	第2分位	第3分位	第4分位	第5分位
80	−16.6538	8.4622	5.8104	4.1016	2.3778
81	−24.9402	9.7464	4.5854	3.3593	2.3695
82	−25.5663	8.6161	5.1265	3.3298	2.2321
83	−42.7234	7.8346	5.2795	3.3801	2.2343
84	4088.1994	7.9623	4.1473	3.1264	2.2137
85	−178.4935	7.0748	4.5797	3.1700	2.1129
86	−28.2979	6.7865	4.3172	3.2102	2.1584
87	−88.3873	6.5638	4.3295	3.1661	2.1376
88	29.3762	4.8776	3.6254	2.8393	2.0554
89	15.4603	5.6960	3.5045	2.9028	2.0126

表4 アデイログ体系によるϕの推定値

〔1970年代〕

年	第1分位	第2分位	第3分位	第4分位	第5分位
70	1.4731	1.4465	1.4256	1.4013	1.3578
71	1.4657	1.4436	1.4221	1.3954	1.3555
72	1.4605	1.4312	1.4145	1.3882	1.3504
73	1.4490	1.4234	1.4081	1.3839	1.3435
74	1.4845	1.4423	1.4158	1.3882	1.3395
75	1.4840	1.4380	1.4091	1.3785	1.3144
76	1.4514	1.4200	1.3956	1.3657	1.3302
77	1.4443	1.4075	1.3912	1.3655	1.3293
78	1.4299	1.4050	1.3805	1.3607	1.3168
79	1.4240	1.4018	1.3873	1.3701	1.3365

〔1980年代〕

年	第1分位	第2分位	第3分位	第4分位	第5分位
80	1.3523	1.3163	1.3061	1.2842	1.2453
81	1.3434	1.3253	1.2923	1.2832	1.2487
82	1.3396	1.3194	1.2990	1.2711	1.2442
83	1.3330	1.3154	1.3004	1.2779	1.2410
84	1.3408	1.3154	1.2794	1.2750	1.2438
85	1.3424	1.3193	1.2924	1.2750	1.2279
86	1.3500	1.3168	1.2834	1.2689	1.2403
87	1.3306	1.3141	1.2809	1.2707	1.2321
88	1.3313	1.3070	1.2755	1.2646	1.2170
89	1.3325	1.3116	1.2700	1.2628	1.2184

Ⅲ 所得税税率構造に含意されるϕの測定

ϕ測定の第2の方法は，長期にわたる実際の所得税税率構造に含意，体現されているϕ値を推定するものである。そのためには所得効用関数の特定化とともに，実際の税率構造があたかも均等犠牲原則にもとづいて決定されているかのように仮定しなければならない。目良浩一（1969）はこの方法により，指数関数型の所得限界効用関数と，均等絶対犠牲(EAS)原則

を前提して，1948〜65年のアメリカの所得税データから，$\phi=1.5$を推定している。

目良（1969）の方法は，EAS 原則を近似的に次式のように表し，

$$T(y)\cdot U'(y)=C \quad 但し \quad y=(y_i+y_{i+1})/2 \qquad (3.1)$$

課税最低限所得 y_0 をこえる最初の所得区分の平均を y_k，次の区分の平均を y_{k+1} とし，y_k における限界効用 $U'(y_k)$ を1とおく。もしEAS原則がみたされているならば

$$U'(y_{k+1})=T(y_k)/T(y_{k+1}) \qquad (3.2)$$

によって，所得税額のデータから各所得の限界効用の相対値は順次計算される。世帯類型を特定化して（3.2）により計算された $U'(y)$ と y の両対数グラフを描くと，右下がりのほぼ直線になり，また異なる5年の税率表にもとづく直線が重なることから，これに指数関数型の限界効用関数（3.3）の対数変換式を当てはめ，ϕ 値を推定したのである。

$$U'(y)=(y/y_k)^{-\phi} \qquad (3.3)$$

目良氏の方法は興味深いものであるが，EAS 原則に近似式を用いており，また所得限界効用関数に指数関数を仮定することの根拠も明らかではない。Young, H. P. (1987) は，もし人々の効用の差の大小に関する判断が，所得の測定単位に独立であるとするならば（相対仮説），所得効用関数は，指数関数

$$U(y)=(1/\rho)y^{\rho} \qquad 0<\rho<1 \ または\ \rho<0 \qquad (3.4)$$

または対数関数

$$U(y)=ln\ y \qquad (3.5)$$

またはこれらの正一次変換関数の形しか有り得ないことを数学的に証明した。相対仮説は所得効用関数で表せば（3.6）となるが，より一般的にいえば，関数 $F(x)$ は x の単位を変化させても，差の大小に対する関係は不変であるという，規模に関する不変性 (scale invariance) を意味し，Youngの証明も，規模に関する不変性をもつ関数形は，指数関数，対数関数およびこれらの正一次変換に限定されることを一般的に証明したものである。θ は

$\theta>0$ の定数である。

$$U(y_1)-U(y_2)\gtreqless U(y_3)-U(y_4)$$

$$\Leftrightarrow U(\theta y_1)-U(\theta y_2)\gtreqless U(\theta y_3)-U(\theta y_4) \qquad (3.6)$$

(3.6) の y_1, y_3 を1個人の課税前の所得，y_2, y_4 をそれぞれの課税後の所得とすれば，1個人にとってどちらの場合負担を重く感じるかは判断できるであろう。そしてその判断は y を千円単位で表しても万円単位で表しても変わらないであろうから，この場合相対仮設を仮定してもよいと思われる。

Young (1987) は課税の公平性に関する EAS 原則と指数関数型所得効用関数 (3.4) を結び付けることによって (3.7) の所得税関数を導出した。（付録　命題3）

$$T(y)=y-(y^{\rho}-C\rho)^{1/\rho} \qquad (3.7)$$

ここで，Cは絶対犠牲の値で正である。

またEAS原則と対数関数型所得効用関数 (3.5) を結び付けると (3.8) の所得税関数が導出される。（付録　命題4）

$$T(y)=(1-e^{-C})y \qquad (3.8)$$

対数関数 (3.5) は指数関数 (3.4) の $\rho=0$ のケースであるから，われわれの考察を (3.7) の所得税関数に限定する。所得効用関数の正一次変換はC値を変化させるにすぎない。(3.4)，(3.5) の所得効用関数をそれぞれEPS原則に結び付けることによっても所得税関数は導出できるが，累進税を妥当とする上ではより厳しい条件であるEAS原則を前提する (3.7) を用いることとする。

われわれは (3.7) を1つの公平な所得税の理論的関数として，これを実際の所得税の法定税率表から課税所得 (y) 毎に計算された税額 $T(y)$ のデータに当てはめる非線形推定を行い，ρ とCの推定値を求めた。(3.4) から所得限界効用の所得弾力性 ϕ を求めるならば

$$\phi=1-\rho \qquad (3.9)$$

となるから，ρ の推定値から ϕ 値が得られる。

推定方法は，Gauss-Newton 法による非線形最小自乗推定である。推定

方法の詳細は，付録に述べられている。データは，わが国の1968年～1989年に所得税の法定税率表の変更された八つの年について，各年1000個の，課税所得(y)とその年の法定税率表にもとづいて計算された税額(T)のセットである。

推定結果は表5に記したように，きわめて良好な所得税関数のフイットを示した。(3.7) は所得効用関数に指数型を仮定し，かつ課税当局があたかも均等絶対犠牲(EAS)原則にもとづいて課税しているかのように仮定した所得税関数であるから，この結果には驚くほかはない。しかもここから推定されたρ値は，-0.35から-0.52の間にあり，それは (3.9) の関係によって，ϕ値では1.35から1.52の間にあることを意味する。このϕ値はまたII節の消費財需要関数によるϕの推定値，1.3～1.5にもきわめて近似している。ただ1988年の税制改革は所得税の限界税率表を12段階（10.5%～60%)から5段階(10%～50%)に減少したのであるが，ϕの推定値は1.26に下がっている。

表5は，納税者の所得分布は考慮にいれていない。あたかも納税者は各所得水準に均等に分布しているかのように考えられているから，Uniformケースと呼ぶ。法定税率表としての公平性を考える上ではこれも意味がある。しかし実際に課税当局が税率表を設定する際には，税収の予想の上からも，納税者の所得分布を考慮にいれるであろう。また，表5の推定では，1968～89年のすべての年の最高課税所得を1億円に揃えている。

表5　所得税関数 $T(y)=y-(y^{\rho}-C\rho)^{1/\rho}$ の推定

(Uniform ケース)

年	ρ	C	R^2
1968	-0.3759	0.0416	1.0000
1969	-0.3780	0.0403	1.0000
1970	-0.3526	0.0460	0.9999
1971-3	-0.3842	0.0346	0.9999
1974-83	-0.5218	0.0099	1.0000
1984-5	-0.4522	0.0167	0.9998
1986-7	-0.3685	0.0298	0.9997
1988-9	-0.2638	0.0606	0.9989

図1　所得税関数の推定 (Uniform case)

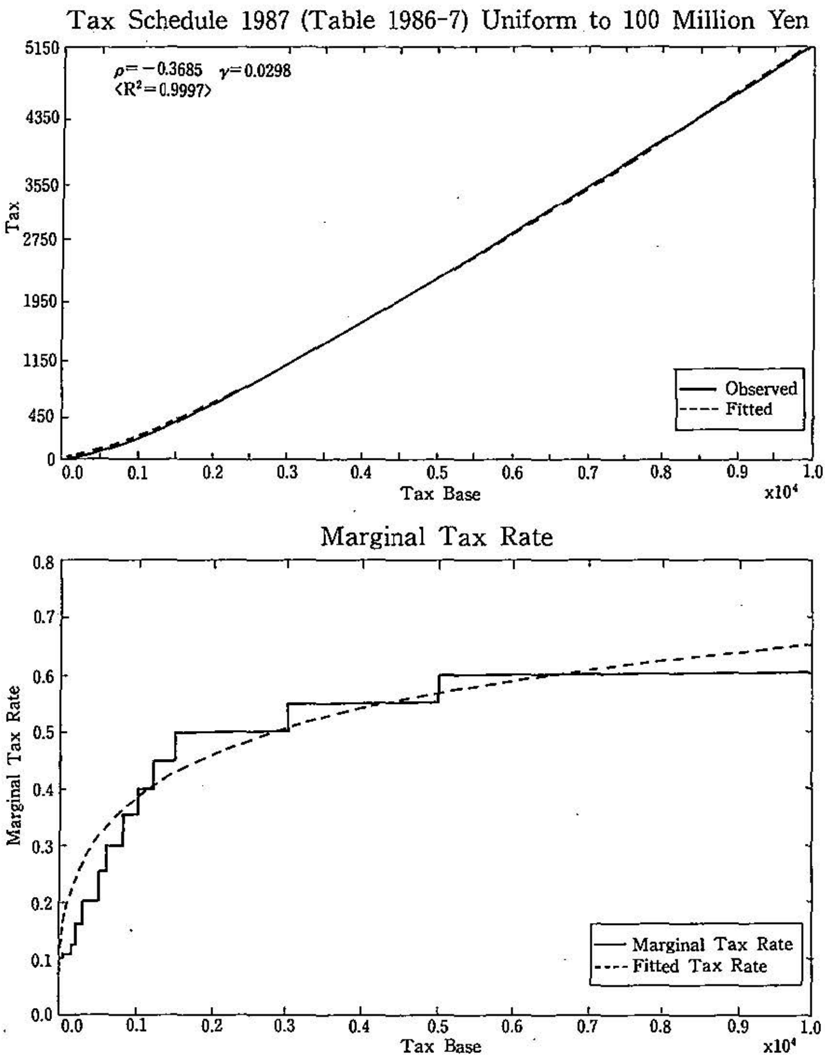


図2 所得税関数の推定 (Unadjusted case)

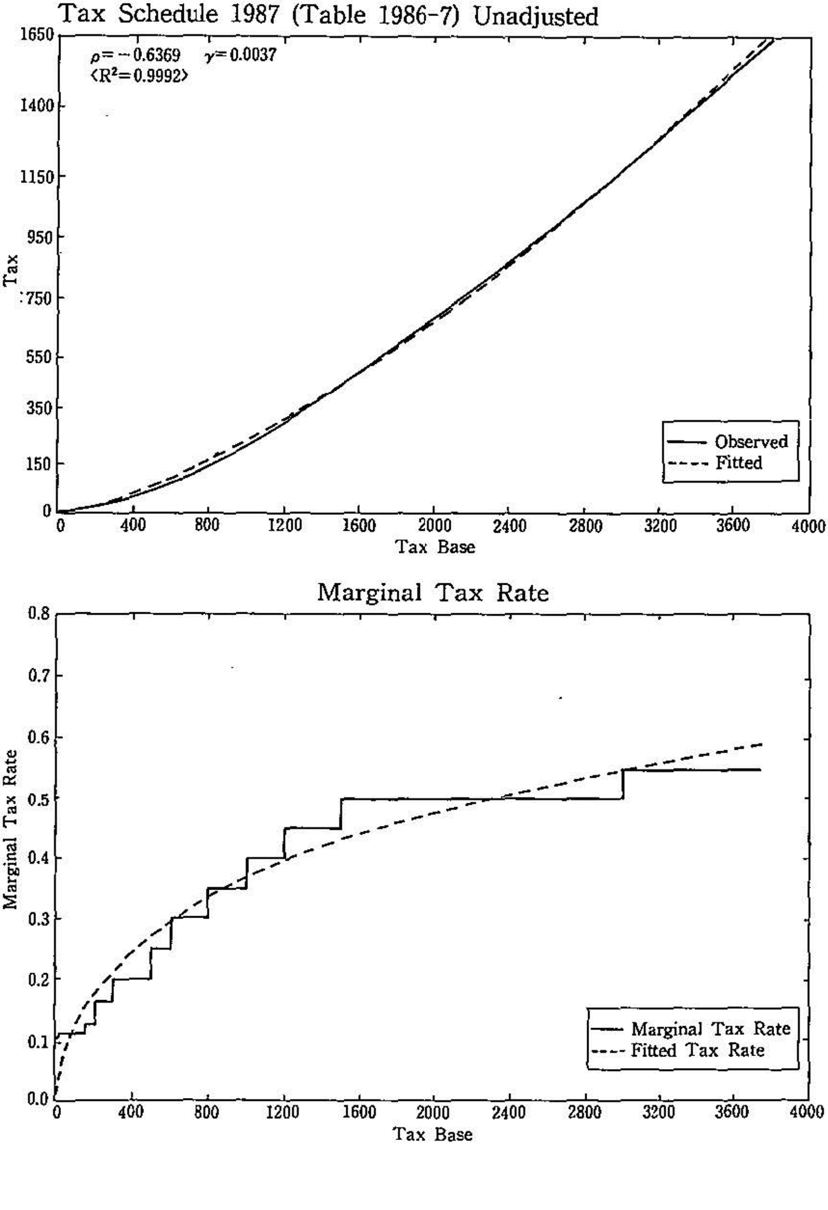
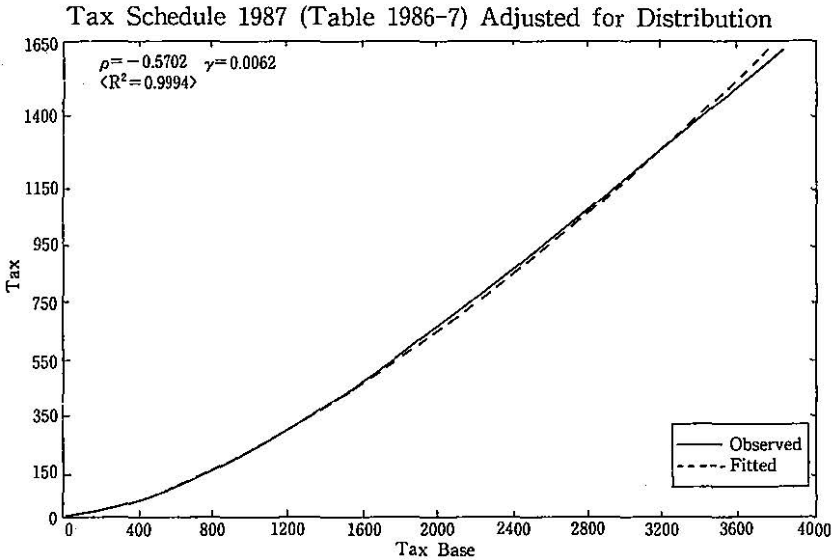
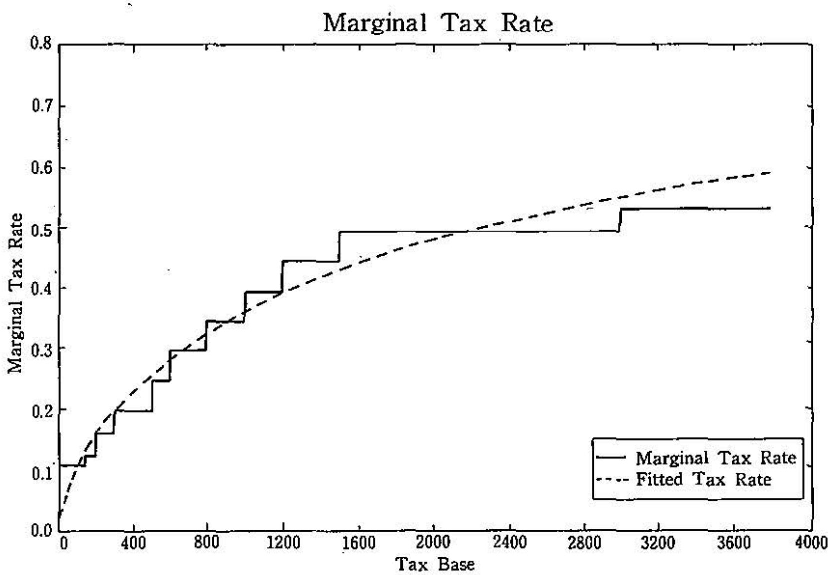


図 3　所得税関数の推定 (Adjusted case)





そこで次に，各年の納税者の99%が入る課税所得の範囲に最高所得を設定し，(3.7) の ρ とCを推定した。その場合なお均等分布を仮定した推定値を，表6のUnadjustedの項で示した。さらに，納税者の所得分布を考慮にいれた推定を行い，その結果を表6のAdjustedの項で示した。これは課税所得の分布の密度に比例して，y とTのセットのデータの数を増やして (3.7) を推定したものである。課税所得の分布データには各年の『国税庁統計年報書』の申告所得者の課税所得階級別人員分布を用いた。紙幅の関係で税制改革前の1987年の図のみを掲載したが，表6のケース（図2，図3）の方が，最高課税所得を1億円にした表5のケース（図1）よりも，1200万円以下の階層で限界税率表へのフイットがよくなっている。

表5と表6を比較すると，納税者の99%が入る課税所得範囲で推定された ρ の絶対値はやや高く，ϕ 値で表せば，1.5～1.7の範囲にある。しかしそのことは，「課税当局が納税者の大部分が入る課税所得範囲において，最高1億円までの課税所得で推定された1.3～1.5の ϕ 値にもとづくよりも重い税負担を課していた」ということをかならずしも意味しない。何故なら，所得税関数 (3.7) において，$\phi=1-\rho$ としての所得 $dT/d\phi$ の符号は解析的には確定できないからである。ただC値を所与とすると課税所得 y の低水準では，ϕ の上昇は税負担の低下 ($dT/d\phi<0$)，y の高水準では，ϕ の上昇は税負担の増加 ($dT/d\phi>0$) をもたらすであろうことが予想できる。

所得税関数

$$T(y)=y-(y^{\rho}-C\rho)^{1/\rho}, \quad \rho<0 \tag{3.7}$$

において $dT/d\phi$ を求めると，$dT/d\phi=-dT/d\rho$ より

$$\frac{dT}{d\phi}=-\frac{1}{\rho^2}(y^{\rho}-C\rho)^{1/\rho}\left[ln(y^{\rho}-C\rho)-\frac{\rho(y^{\rho}\,lny-C)}{(y^{\rho}-C\rho)}\right]$$

$$[A]=\left[ln(y^{\rho}-C\rho)-\frac{\rho(y^{\rho}lny-C)}{(y^{\rho}-C\rho)}\right]$$

とおくと，$y^{\rho}-C\rho>0$ であるから，$dT/d\phi$ の符号は[A]の符号に依存し，[A]の符号と逆になる。

$$[A] \gtreqless 0 \quad \Rightarrow \quad (dT/d\phi) \lesseqgtr 0$$

y の上昇にともない，［A］の第１項よりも第２項の方が大になり，$dT/d\phi>0$ になるであろう。このことを数値例で示すと，C=1 とおいたとき表７のようになり，$y=1$ では $\phi=1-\rho$ の ϕ 値が上昇するほどＴは減少するが，$y=2$ 以上では，ϕ の値の上昇はＴを増加させる。

実際にどの y の水準でこの逆転が起こるかは，[A] に代入される y, ρ, Ｃの値に依存するが，(3.7) の所得税関数の持つこの性格は興味深い。納税者の分布を考慮にいれた Adjusted ケースを用いて，例えば同額の所得税収を得るために，(3.7) に代替的な ρ 値を挿入することによって，低所得層で減税（増税），高所得層で増税（減税）となる様々な所得税負担のパターンを導出することもできるであろう。

表７　$T(y)=y-(y^{\rho}-C\rho)^{1/\rho}$ の T 計算例 (C=1.00 と設定)

		ρ									
		-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.60	-0.70	-0.80	-0.90	-1.00
y	1.00	0.61	0.60	0.58	0.57	0.56	0.54	0.53	0.52	0.51	0.50
	2.00	1.28	1.29	1.30	1.31	1.31	1.32	1.32	1.33	1.33	1.33
	3.00	1.96	2.01	2.05	2.10	2.14	2.17	2.19	2.22	2.23	2.25
	4.00	2.65	2.76	2.85	2.93	3.00	3.06	3.10	3.14	3.17	3.20
	5.00	3.35	3.52	3.67	3.79	3.89	3.97	4.03	4.09	4.13	4.17
	6.00	4.06	4.30	4.49	4.66	4.79	4.89	4.98	5.05	5.10	5.14
	7.00	4.78	5.08	5.33	5.54	5.70	5.83	5.93	6.01	6.08	6.13
	8.00	5.49	5.87	6.18	6.43	6.63	6.78	6.90	6.99	7.06	7.11
	9.00	6.22	6.67	7.04	7.33	7.56	7.73	7.86	7.96	8.04	8.10
	10.00	6.94	7.48	7.91	8.24	8.50	8.69	8.84	8.95	9.03	9.09

表 6 所得税関数の推定

	ρ		C		R^2	
	adj'd	unadj'd	adj'd	unadj'd	adj'd	unadj'd
1968	−0.4976	−0.5356	0.0195	0.0156	0.9992	0.9999
1969	−0.5670	−0.5704	0.0117	0.0115	0.9996	0.9999
1970	−0.6435	−0.6695	0.0061	0.0051	0.9991	0.9999
1971	−0.6763	−0.6896	0.0043	0.0039	0.9992	0.9998
1972	−0.6795	−0.6909	0.0042	0.0039	0.9992	0.9998
1973	−0.6424	−0.5737	0.0053	0.0086	0.9993	0.9997
1974	−0.6054	−0.7019	0.0050	0.0026	0.9977	0.9997
1975	−0.6367	−0.6939	0.0041	0.0027	0.9986	0.9999
1976	−0.6214	−0.7053	0.0045	0.0025	0.9982	0.9997
1977	−0.6325	−0.7084	0.0042	0.0025	0.9985	0.9998
1978	−0.6399	−0.6956	0.0040	0.0027	0.9987	0.9999
1979	−0.6510	−0.6814	0.0037	0.0030	0.9991	0.9999
1980	−0.6515	−0.6649	0.0037	0.0033	0.9993	0.9999
1981	−0.6502	−0.6583	0.0037	0.0035	0.9993	0.9999
1982	−0.6478	−0.6544	0.0038	0.0036	0.9993	0.9999
1983	−0.6513	−0.6613	0.0037	0.0034	0.9993	0.9999
1984	−0.6427	−0.6900	0.0038	0.0027	0.9989	0.9999
1985	−0.6435	−0.6839	0.0038	0.0028	0.9990	0.9999
1986	−0.6591	−0.6158	0.0032	0.0044	0.9990	0.9993
1987	−0.6369	−0.5702	0.0037	0.0062	0.9992	0.9994
1988	−0.6287	−0.5835	0.0034	0.0049	0.9993	0.9996
1989	−0.6001	−0.5251	0.0042	0.0076	0.9992	0.9994

Ⅳ　拡張型消費需要関数による ϕ の推定

消費財需要のみでなく，余暇消費を含む拡張型需要関数の推定にもとづいても ϕ が推定できる。これはⅡ節の消費財需要関数による方法の拡充である。l を労働時間，h を余暇時間，H を利用可能総時間，z を定額の非労働所得，ω を時間賃金とすると，拡張型LES需要関数からは（4.1）によって ϕ が推定され，拡張型 Addilog 需要関数からは（4.2）によって ϕ が推定できる。但しこの場合の ϕ は，非労働所得 z の限界効用の z 弾力性である。

(1)　拡張型 LES 需要関数による ϕ

$$\mathrm{Max.U}=\Sigma\beta_i\, ln\,(x_i-\gamma_i)+\beta_0\,(\mathrm{h}-\gamma_0)\quad \mathrm{s.t.}\ \omega l+\mathrm{z}=\Sigma \mathrm{p}_i x_i$$

$$\phi=\mathrm{z}/[\mathrm{z}-\Sigma \mathrm{p}_i\gamma_i+\omega\,(\mathrm{H}-\gamma_0)] \tag{4.1}$$

(2)　拡張型 Addilog 需要関数による ϕ

$$\mathrm{V}=\Sigma\alpha_i\,(\mathrm{z}/\mathrm{p}_i)^{\beta i}+\alpha_0\,(\mathrm{z}/\omega)^{\beta 0}$$

$$\phi=1-\Sigma\beta_i\, S_i+\beta_0\, S_\omega\quad \text{但し}\ S_\omega=\omega l/\mathrm{z} \tag{4.2}$$

またもし直接効用関数において消費財需要 x と余暇需要 h が加法的分離性を持つならば,Frisch の ϕ 測定式（2.1）が適用できる。(4.3) は（2.1）や（2.2）を労働の所得弾力性 η_l，労働の賃金弾力性 $\mathrm{e}_{l\omega}$，消費の賃金弾力性 $\mathrm{e}_{x\omega}$，労働所得と非労働所得の比率 S_ω のタームで導出したものである。

$$\phi=\frac{\eta_l\ (l+S_\omega\eta_l)}{S_\omega\eta_l-\mathrm{e}_{l\omega}}=\frac{1}{(\mathrm{e}_{x\omega}/\eta_c)-(\mathrm{e}_{l\omega}/\eta_l)} \tag{4.3}$$

CES効用関数（4.4）は加法的分離型ではないが，これを $-\mu$ 乗で変換した（4.5）は加法的分離型である。(4.5) を用いて導出される ϕ の式は（4.6）である。(4.4) と（4.5）の労働と余暇の代替の弾力性 σ はいずれも $\sigma=1/(1+\mu)$ であるから，CES 効用関数を所得制約の下で最大化して求められる労働供給関数によって推定された σ 値を用いて，(4.6) から ϕ を推定することも可能である。[5]

$$\mathrm{U}=[(1-\alpha)\mathrm{C}^{-\mu}+\alpha\,(\mathrm{H}-l)^{-\mu}]^{-1/\mu} \tag{4.4}$$

$$\mathrm{U}=(1-\alpha)\mathrm{C}^{-\mu}+\alpha\,(\mathrm{H}-l)^{-\mu} \tag{4.5}$$

$$\phi=(1+\mu)\mathrm{z}/(\mathrm{z}+\omega\mathrm{H}) \tag{4.6}$$

V　む す び

われわれは小論において，所得限界効用の所得弾力性 ϕ の値が推定可能であることを示した。効用関数が加法的分離性をもつ場合の消費財需要関数，余暇を含むその拡張型，および，所得税関数からの3アプローチによって ϕ は推定可能であり，消費財需要関数および所得税関数からのアプローチについては実際に推定を行った。両アプローチからの ϕ 推定値は，80年代のLESにもとづく場合を別とすれば，1.3～1.7の範囲，1.5前後の値になることが確かめられた。またわが国の1960年代から80年代の所得税の税率構造が，この範囲の ϕ 値による指数関数型所得効用関数と均等絶対犠牲原則から導出される所得税関数にきわめてよくフィットすることもわかった。ϕ 値の推定により，伝統的な均等犠牲原則による課税も十分実用可能であるが，そのほかのフレームワークにも応用できる。

最適所得税の理論は，各個人が所得制約の下に効用関数を最大化して最適な財消費量と労働供給を決定する。政府は予算制約の下で，各個人の間接効用関数の関数としての社会的厚生関数を最大化する所得税率を決定するという構造になっている。社会的厚生関数を構成する各人の間接効用関数には各人に異なるウエイトが付けられる。このウエイトは「各個人の所得の社会的限界効用」(v)であり，それは「各個人の効用の社会的限界重要度」と「各個人の所得の限界効用」との積である。前者は社会的価値判断により決定されるほかはなく，民主主義社会においては各個人に等しいと判断されよう。後者は客観的に測定され得る値であるにも拘らず，最適所得税理論においては，前者と後者の積であるvを社会的価値判断によるものとして，どのような範囲の値を設定すべきかは問わない。代替的な値をvに設定して，その結果の最適税率を導出するのみである。[6]所得限界効用の所得弾力性 ϕ の値が推定されるならば，基準所得の限界効用値を1とおくことによって各所得水準の相対的な限界効用値を決定することができ，「各個人の効用の社会的限界重要度」を等しく1にした場合のv値に，具体的な根拠を与えることができよう。

また近年，所得の等価変分(Equivalent Variation, EV)，あるいは補償変分(Compensating Variation, CV)の合計を，税制などの代替的改革による社会的厚生変化の指標に用いる分析が盛んにおこなわれている。[7] 各個人のEVやCVを等しいウエイトで合計して社会的厚生変化とすることも一つの方法である。異なるウエイトとするならその値の根拠が問われなければならない。各個人の所得の限界効用が所得によって相違することをウエイトの根拠とするならば，ここにも ϕ の推定値を応用できるであろう。

〔付　　録〕

命題 1

直接効用関数が，n財について，加法的分離性をもつならば，所得限界効用の所得弾力性 ϕ は需要の価格弾力性 e_{ji}, e_{ii}, 所得弾力性 η_j, η_i と次の関係をとる。

$$\phi=\frac{\eta_i\eta_j}{\eta_i e_{ji}-\eta_j e_{ii}}=\frac{1}{(e_{ji}/\eta_j)-(e_{ii}/\eta_i)} \tag{1}$$

＊（証明）：

$$\text{Max}\quad U=U_1(x_1)+U_2(x_2)+\cdots\cdots+U_n(x_n) \tag{2}$$

$$\text{s.t.}\qquad y=\sum_i p_i x_i$$

$$\Rightarrow u_i=\lambda p_i,\quad u_i=\partial U_i(x_i)/\partial x_i,\quad \lambda=u(y)$$

$$ln u_i=ln\lambda+ln p_i \tag{3}$$

(3)を lny, lnp_i lnp_j で偏微分する。

$$\frac{\partial ln u_i}{\partial ln y}=\frac{\partial ln\lambda}{\partial ln y}=-\phi \tag{4}$$

$$\frac{\partial ln u_i}{\partial ln p_i}=\frac{\partial ln\lambda}{\partial ln p_i}+1=\theta_i+1,\quad \theta_i=\frac{\partial ln\lambda}{\partial ln p_i} \tag{5}$$

$$\frac{\partial ln u_i}{\partial ln p_j}=\frac{\partial ln\lambda}{\partial ln p_j}=\theta_j,\qquad \theta_j=\frac{\partial ln\lambda}{\partial ln p_j} \tag{6}$$

他方，加法性の仮定により u_i は x_i のみの関数であるから，

$$\frac{\partial ln u_i}{\partial ln y}=\frac{\partial ln u_i}{\partial u_i}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ \frac{\partial x_i}{\partial ln x_i}\ \frac{\partial ln x_i}{\partial ln y}=\frac{x_i}{u_i}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ \eta_i \tag{7}$$

$$\frac{\partial ln u_i}{\partial ln p_i}=\frac{x_i}{u_i}\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i}e_{ii} \tag{8}$$

$$\frac{\partial ln\,u_i}{\partial ln\,p_j}=\frac{x_i}{u_i}\quad\frac{\partial u_i}{\partial x_i}e_{ij} \tag{9}$$

(7)=(4)，(5)=(8)とおき，両者の比率を求めると

$$-\phi e_{ii}=\eta_i\theta_i+\eta_i \tag{10}$$

同様に(7)=(4)，(9)=(6)とおき，両者の比を求めると

$$-\phi e_{ij}=\eta_i\theta_j \tag{11}$$

任意の j 財についても，同様に $u_j=\lambda p_j$ から

$$-\phi e_{jj}=\eta_j\theta_j+\eta_j \tag{12}$$

$$-\phi e_{ji}=\eta_j\theta_i \tag{13}$$

(10)と(13)を用いて θ_i を消去すると

$$\phi=\frac{\eta_i\eta_j}{\eta_i e_{ji}-\eta_j e_{ii}}=\frac{1}{(e_{ji}/\eta_j)-(e_{ii}/\eta_i)} \tag{14}$$

QED

命題 2

間接効用関数が加法的分離性をもつとは

$$V(p,y)=V\,[\sum_k V_k\,(y/p_k)] \tag{1}$$

の形をとることである。この場合には，ϕ は，需要の自己価格弾力性 e_{ii}，所得弾力性 η_i，支出比率 S_i と次の関係をとる。

$$\phi=\frac{e_{ii}+1+(1-S_i)\eta_i}{1-S_i} \tag{2}$$

＊（証明）：

ロワの恒等式の対数をとり，

$$ln\,x_i=ln\,(-\partial V/\partial p_i)-ln\,(\partial V/\partial y)$$

$$-\partial V/\partial p=V_i'\,yp_i^{-2},\quad \partial V/\partial y=\sum_k V_k'\,p_k^{-1}=\lambda$$

$$ln\,x_i=ln\,V_i'+ln\,y-2ln\,p_i-ln\,\lambda \tag{3}$$

(3)の $ln\,y$，$ln\,p_i$，$ln\,p_j$ の偏微分により

$$\frac{\partial ln\,x_i}{\partial ln\,y}=\eta_i=\frac{\partial ln\,V_i'}{\partial ln\,y}+1+\phi,\ 但し\ \phi=-\frac{\partial ln\,\lambda}{\partial ln\,y} \tag{4}$$

$$\frac{\partial ln\,x_i}{\partial ln\,p_i}=e_{ii}=\frac{\partial ln\,V_i'}{\partial ln\,p_i}-2\frac{\partial ln\,\lambda}{\partial ln\,y} \tag{5}$$

$$\frac{\partial ln\,x_i}{\partial ln\,p_j}=e_{ij}=-\frac{\partial ln\,\lambda}{\partial ln\,p_j} \tag{6}$$

V_i'は (y/p_i)のみの関数であるから

$$\frac{\partial ln V_i'}{\partial ln y}=-\frac{\partial ln V_i'}{\partial ln p_i} \tag{7}$$

(4)と(5)を加え，(7)の関係を考慮すると

$$\eta_i+e_{ii}=-1+\phi-\frac{\partial ln \lambda}{\partial ln p_i} \tag{8}$$

他方，

$$\frac{\partial ln x_j}{\partial ln p_i}=e_{ji}=-\frac{\partial ln \lambda}{\partial ln p_i}, \qquad j\neq i \tag{9}$$

また所得制約式の p_i による偏微分により

$$\sum_j S_j e_{ji}+S_i=0 \tag{10}$$

$$e_{ji}=-(S_i+S_i e_{ii})/\ (1-S_i) \tag{11}$$

(11)を(9)に代入すると

$$-\frac{\partial ln \lambda}{\partial ln p_i}=\frac{-(S_i+S_i e_{ii})}{1-S_i} \tag{12}$$

(12)を(8)に代入することにより(2)が導出される。

$$\phi=\frac{e_{ii}+1+(1-S_i)\eta_i}{1-S_i} \tag{2}$$

QED

命題 3

(1)　$U(y)=\frac{1}{\rho}y^{\rho}$,

の効用関数では，所得税関数は

$T(y)=y-(y^{\rho}-C\rho)^{1/\rho}$

のとき，EAS 原則がみたされる。

＊（証明）：

$$U(y)-U[y-T(y)]=\frac{1}{\rho}\ \{y^{\rho}-[y-T(y)]^{\rho}\}\ =C$$

C はすべての y に等しい定数。

$[y-T(y)]^{\rho}=y^{\rho}-C\rho$

$T(y)=y-(y^{\rho}-C\rho)^{1/\rho}$

QED

命題 4

(2)　$U(y)=ln y$

の効用関数では，所得税関数は

$T(y)=(1-e^{-C})y$,　C は定数

のとき，EAS原則がみたされる。

＊（証明）：

$$U(y)-U[y-T(y)]=ln\,y-ln[y-T(y)]=C,$$

Cはすべての y に等しい定数。

計算の便益上，$C=ln\,\alpha$，とおいておく，すると

$$\frac{y}{y-T(y)}=\alpha$$

$$T(y)=(1-\frac{1}{\alpha})y$$

$ln\,\alpha=C$ は $\alpha=e^{c}$ であるから

$$T(y)=(1-e^{-c})y$$

QED

非線形一般化最小自乗法

非線形回帰モデルは従属変数の i 番目の観測値，Y_i の期待値がパラメータ θ の非線形の関数となっているケースであり，通常の線形回帰モデルはその特殊ケースとなる。以下では非線形モデルの推定アルゴリズムの概略を述べておく。まず，モデルを一般に(1)の形で表す。

$$Y_i=g(X_i;\theta)+u_i,\quad E(u_i)=0,\quad V(u_i)=\Sigma,\quad i=1,\dots,n \tag{1}$$

ここで，Y_i はM×1の従属変数ベクトル，X_i は p×1の独立変数ベクトル，θ は k×1のパラメータベクトル，u_i はM×1の攪乱項，Σ はM×Mの共分散行列であり，添字 i は i 番目の観測値を表す。(1)を全標本について書けば

$$Y=g(X;\theta)+u,\quad V(u)=I_n\otimes\Sigma,\quad i=1,\dots,n \tag{2}$$

ここでは Y は Y_1 から Y_n を縦に並べたベクトルで，X, u も同様に定義される。I_n は n 次元の単位行列，⊗はクロネッカー積である。θ の有効推定量は Σ が既知の場合二次形式

$$(Y-g(X;\theta))'(I_n\otimes\Sigma^{-1})(Y-g(X;\theta)) \tag{3}$$

を最小化することにより求められる。θ の解は(3)の一次微分(4)をゼロとする値で与えられる。

$$(\partial g/\partial\theta)(I_n\otimes\Sigma^{-1})(Y-g(X;\theta))=0 \tag{4}$$

ここで $\partial g/\partial\theta$ は k×nMの g の偏微分係数行列である。一般には(4)の解析的解を求めるのは困難なため反復的方法による解法が必要となる。解法には種々の方法があるが[8]，ここでは本論文の所得税関数と線形支出体系の推定で用いたガウス－ニュートン法を紹介しておく。

g のテイラー展開により，$g(X;\theta)$ の θ_0 の周りでの近似値は

$$g(X;\theta) \fallingdotseq g(X;\theta_0) + \partial g/\partial\theta\,(\theta-\theta_0) \tag{5}$$

で与えられる，これを(4)に代入し

$$(\partial g/\partial\theta)(I_n \otimes \Sigma^{-1})(Y-(X;\theta_0)-\partial g/\partial\theta\,(\theta-\theta_0))=0 \tag{6}$$

が得られる。これより θ の近似解は次の式で与えられる。

$$\hat{\theta}=\theta_0+[(\partial g/\partial\theta)(I_n \otimes \Sigma^{-1})(\partial g/\partial\theta)]^{-1}\ [(\partial g/\partial\theta)(I_n \otimes \Sigma^{-1})(Y-g(X;\theta_0)] \tag{7}$$

また，Σ は通常は未知のため誤差ベクトルから次の式で推定する。

$$\hat{\Sigma}=U'U/n \tag{8}$$

ここではUはM個の式の誤差ベクトルを横に並べた $n \times M$ の行列である。θ の解はある初期値から出発し，(7)，(8)のプロセスを収束するまで繰り返すことにより求められる。この方法は線形モデルでの反復Feasible GLS (IFGLS)の一般化であり，反復非線形一般化最小自乗法と呼ばれる。実際の計算では(7)の第二項の θ の修正項が目的関数を増加させることがあるので，この項にステップ係数を掛け，修正幅の調整を行う。また，推定値の漸近共分散行列は

$$\hat{V}(\hat{\theta})=[(\partial g/\partial\theta)(I_n \otimes \hat{\Sigma}^{-1})(\partial g/\partial\theta)]^{-1} \tag{9}$$

で与えられる。ここで攪乱項が正規分布に従うときには解は最尤推定量となる。[9]

注

(1) 本小論は，村上（1992）の中心的な部分について，ϕ 推定上の改良を加えたものである。主として浅野が線形支出体系の需要関数推定と，所得税関数の非線形最小自乗推定を行い，下野がアデイログ体系の需要関数推定を行った。

(2) Frisch (1932) pp.114-135，記号の表記は変更。Frisch の "marginal money flexibility" $(-\tilde{w})$ が ϕ に相当する。

(3) 村上（1992）pp.90-113 に検討。

(4) Addilog 体系の推定は，金子能宏（1987）「SAS/ETSによる需要関数の推定」一橋大学情報処理センターニュース10月号の方法による。

(5) 下野は拡張型LES需要関数および拡張型Addilog需要関数の推定と，その結果にもとづく ϕ の推定をも行ったが，今回は紙幅の制約により別個の論文にして発表することとした。

(6) Atkinson, A. B. and J. E. Stiglitz (1980) pp.386-439.

(7) Auerbach (1985) pp.61-127。例えばKing (1983)は家賃補助政策の変更がもたらす厚生変化を計測するに際して，EV に現行所得を加えた等価所得 y を所得階層別に求め，これにウエイト $(1-\varepsilon)$ を乗じた加重和を社会的厚生としている。
$W=(1-\varepsilon)^{-1}/\Sigma y_{Ei}^{1-\varepsilon}$

(8) Judge 他（1984）pp.951-979.

(9) Goldberger (1991) pp.332-334.

引用文献

Atkinson, A. B. and J. E. Stiglitz *(1980) Lectures on Public Economics*, McGraw-Hill

Auerbach, A. J. (1985) "The theory of excess burden and optimal taxation", in Auerbach, A. J. and Feldstein, M. eds. *Handbook of Public Economics*. vol. 1, 61-127

Brunner, Johan K. (1989) *Theory of Equitable Taxation: Normative Foundation and Distributive Consequences of Income Taxation*. Spring-Verlag

Deaton, Angus (1974) "A reconsideration of the empirical implications of additive preferences". *Economic Journal* 84, 338-348

Frisch, Ragner (1932) "New Methods of Measuring Marginal Utility", in Lederer, E. and J. Schumpeter eds. *Beitrage zur Ökonomischen Theorie*, 3. J. C. B. Mohr

Frisch, Ragner (1959) "A complete scheme for computing all direct and cross demand elasticities in a model with many sectors". *Econometrica*, 27, 177-196

Goldberger, A. S. (1991) *A Course in Econometrics*, Harvard U. P.

Judge, G. G., W. E. Griffiths, R. C. Hill, H. Lutkepohl, and I. C. Lee (1984) *The Theory and Practice of Econometrics*, Second ed. Wiley

Mera, Koichi (1970) "Experimental determination of relative marginal sacrifice". *Quarterly Journal of Economics*, 84. 464-477

Mill, John Stuart (1848) *Principle of Political Economy*. 戸田正雄訳『経済学原理』春秋社 1948

村上雅子 (1992) 「所得税における垂直的公平性の理論的根拠」(学位論文, 一橋大学)

Pigou, A. C. (1928, 3rd. ed. 1951) *A Study in Public Finance*. Macmillan

Young, H. P. (1987) "Progressive taxation and the equal sacrifice principle". *Journal of Public Economics*, 32. 203-214

村上 雅子 国際基督教大学教授

浅野 哲 東京都立大学助教授

下野 恵子 東京経済大学助教授

A STUDY OF EQUITABLE INCOME TAX SCHEDULES

—Estimation and Application of the Income Elasticity of the Marginal Utility of Income—

《Summary》

Masako Murakami, Seki Asano and Keiko Simono

In this paper, we explored the methods to measure the income elasticity of marginal utility of income(ϕ), and estimated its value. ϕ can be measured by three different approaches. (1) Consumer demand function approach: If direct utility function is additively separable, ϕ is uniquely determined by equation (2.2) which is an extention of Frisch's (2.1) to n goods case. If indirect utility function is additively separable, ϕ can be measured by (2.3) as Deaton (1974) has proved. The Linear Expenditure System is deduced by maximization of an additively separable direct utility function and its ϕ is measured by (2.7) which is equivalent to (2.2). We estimated the parameters of LES, and based on them, estimated ϕ using Japanese household expenditure data. $\phi=1.4937$ for 1970s. The Indirect Addilog Demand System is deduced from additively separable indirect utility function, and its ϕ can be measured by (2.10). We estimated $\phi=1.4009$ for the 1970s and $\phi=1.2906$ for the 1980s based on Addilog System.

(2) Income tax rate schedule approach: We tried to estimate ϕ which is embodied in the actual Japanese income tax rate schedule, 1968～89. Assuming exponential income utility function and Equal Absolute Sacrifice principle, we deduced an equitable income tax function(3.7). As Table 5 and 6 show, (3.7) fits very well with the actual tax schedule. Estimated $\phi=1-\rho=1.3\sim1.7$.

(3) Augmented demand function approach: As an extention of approach (1), leisure is included in utility function. Then, using augmented LES and Addilog, ϕ can also be measurable.