

効用の測定について

久 武・雅 夫

1. 効用の測定に関する問題点

効用の概念は古くから経済学に取り入れられながらいまだにその概念構成や理論的な位置づけについて学者の見解が分れている。ある学者はこの概念を基礎として理論を構成しようとするに対し、他の人々はこの概念構成に疑義があるとしてこの概念を回避して理論を構成している。問題は効用を数量的に測定できるかどうかということである。もし効用が数量的に測定できるということであれば、経済理論がカバーし得る領域は著しく拡大され、とくに厚生経済学あるいは公共経済学における政策提言の可能性が大きくなるのに反し、効用の測定を断念しなければならぬとすれば、実際に解決を要する問題、たとえば所得税率を公正に決定する問題。あるいは公的財と私的財との配分の問題などについて、科学的な発言をすることが著しく制限される。⁽¹⁾これまでの傾向としては、理論の厳密性を尊重する学者は効用概念を回避しながら、効用概念を基礎として築かれた理論の成果をできるだけ取り入れようと努力したのに対し、cardinalist とよばれる一部の学者たちは執念深く効用の測定方法を研究しつづけ、今日までに決定的といえないまでも相当の成果を挙げている。

効用測定の可能性を証明した代表的な業績として、フリッシュの研究とノイマン・モルゲンシュテルンの研究とが挙げられる。前者は1932年に公刊された彼の著書 *New Methods of Measuring Marginal Utility* に発表され、これに先立つ彼の初期の研究⁽²⁾を拡充整備したものである。彼はこの研究において、効用測定の可能性を証明したばかりでなく、実際の測定をも試みている。それにも拘らず彼の理論が論理的厳密性を尊重

する学者たちによって受け入れられず、効用概念回避の方向に理論の発展が見られたことは、後に指摘するように、彼の論証に論理的厳密性を欠く点があったためと思われる。一方ノイマンたちの業績⁽³⁾はリスクを含む事象の選択を行なう場合に効用が客観的な量として確定し得ることの証明であり、リスクを含まない確定事象の選択についてはそのまま適用できない。しかしその論証は論理的に厳密であり、その成功は cardinalist たちを勇気づけて、効用測定理論の行きづまりを打開する突破口となった。一方において、ノイマンの方法をさらに具体的に展開し、またはこれを適用して実際に効用の測定を試みた一連の研究がある⁽⁴⁾。反面、フリッシュの線に沿ってリスクを含まない財の場合について効用を測定しようとする試みが数多く発表されるようになった。⁽⁵⁾ 本論では効用測定の論理的構造の問題に焦点を合せ、後者に属する研究の中でフリッシュ自身が発表した新しい方法およびその他の若干の方法を取り上げ、どのような点で以前の理論が改善されたかを明らかにしたいと思う。

その前に明らかにしておかなければならないことは、効用計測の問題には二つの側面があるということである。一つはある個人についてその効用が測定できるかどうかという問題であり、今一つは異なる個人の効用を比較したり集計したりすることが可能かどうかという問題である。後者が前者を前提とすることはいうまでもないが、前の問題が解決されても後の問題は別個の問題として残る。というのはかりに個人の効用が計測可能であることが立証されたとしても、効用の単位をどれだけの大きさにするかは任意であるし、この単位を異なる個人について共通に定めるということは、単位そのものが主観的な判断に依存するので困難であるから、効用の個人間の比較は一般的に不可能と考えられている。

cardinalist たちはこの問題をつぎのような方法で解決しようとしている。まず単位の問題を解決するために、財の効用の代りに財の限界効用の財に対する弾力性を用いる。⁽⁶⁾ 財の量を x とし限界効用を $u(x)$ で表わせば、限界効用の弾力性は $\frac{du(x)}{dx} \cdot \frac{x}{u(x)} = \frac{d \log u(x)}{d \log x}$ で表わされる。この数

値は x の単位にも、また $u(x)$ の単位にも無関係であることは式を一見して分ることである。他方この弾力性を測定することが可能であるとすればこれを積分することによって限界効用を測定することができる。

すなわち弾力性が x の関数として測定せられるものとし、これを $f(x)$ とすれば

$$\frac{du(x)}{dx} \cdot \frac{x}{u(x)} = f(x)$$

となり、これを積分して $u(x)$ を求めると

$$u(x) = Ke^{\int \frac{f(x)}{x} dx}$$

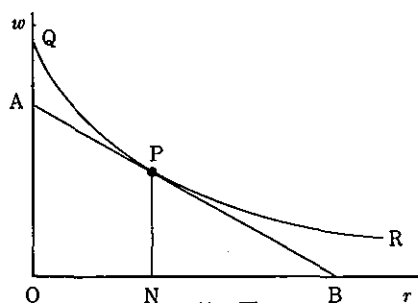
となる。 K の値は x の単位と、効用の単位のとり方に依存するが、同一個人における x の異なる値に対する限界効用の比はこれで確定することになる。また $u(x)$ をさらに積分することによって全部効用の値も確定することができる。

そこで効用測定に関する第一の問題、すなわち個人の効用を測定する問題は、この限界効用の弾力性を測定する問題に転化できる。しかも個々の財の限界効用の弾力性を測定する代りに貨幣の限界効用の弾力性を測定するというのが cardinalist の一般のやり方である。貨幣（または所得）の限界効用の弾力性（これを貨幣弾力性と略称する）から貨幣の限界効用を求め、これに財の価格を乗ずることによって財の限界効用を求めることができるからである。そこで問題は貨幣弾力性を測定できるかということに帰する。これは本論の主題であるから、後段に譲ってもう一つの問題に移る。

それは異なる個人の効用の比較の問題である。これは各個人の効用の共通尺度を定めることによって解決されるがこれは一般には不可能である。そこで cardinalist たちが採用した方法は、社会全体あるいは集団全体の効用を測定する代りに、平均人の貨幣弾力性を測定する方法である。たとえば効用計測方法の開拓者であるフリッシュはその初期の著書 *Sur*

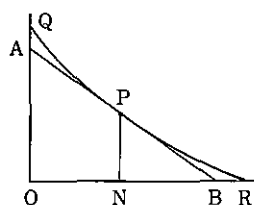
un problème d'économie pure. 1926 においてはパリ消費組合連合の消費統計を用い、またそれに続く著書 *New Methods of Measuring Marginal Utility*. 1932 においてはアメリカ 9 都市の家計調査 (1918~19年) に基づいて貨幣弾力性を計算している。したがって求められた弾力性はこれらの集団の平均的家計の弾力性であり、これによって得られた効用はその集団全体の効用を代表するものと考えてよいというわけである。このことはこの集団が平均人の集団であると見做すことを意味し、そこに問題がないわけではないが、第一次近似としては許されることであろう。つぎに異なる個人の効用の比較については、効用の大きさを比較する代わりに貨幣弾力性の大きさを比較するという方法をとる。すなわち貨幣弾力性の大きさが相等しい個人は効用に関して同じ位置にあると考えるのである。これについてはつぎのような論拠が考えられる。

いま貨幣の限界効用は逓減的であるとし、しかもその逓減のしかたは所得 r の増加にしたがって次第に小さくなるものとすれば、限界効用の曲線 QR は第 1 図のように上方に凹で、どこまでも r 軸とは交わらないような曲線として描かれるであろう。(第 1 図) r は実質所得、 w は所得

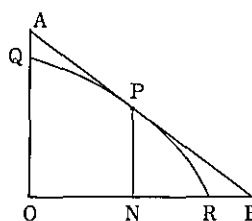


第 1 図

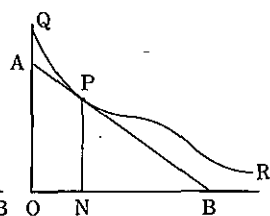
の限界効用を表わす。いま所得の大きさを ON で表わし、 ON に対応する限界効用を NP とし、 P 点で限界効用曲線 QR に接線を引き、 w 軸、 r 軸と交わる点を A 、 B とすれば貨幣弾力性 \tilde{w} の絶対値は $\frac{ON}{NB}$ で表わされるから、ある限度を超えると所得 r が大きくなるにしたがって \tilde{w} の絶対値は小さくなる。したがって限界効用と $-\tilde{w}$ とは 1 対 1 の対応をなすから、限界効用の大きさを判定するのに $-\tilde{w}$ を用いることができる。たとえばすべての個人の限界効用曲線の形状が同一であると仮定すれば貨幣弾力性が等しいということは所得の分配が平等であることを意味することになる。



第2図



第3図



第4図

限界効用曲線が第2図のように上に凹であっても r 軸と交わる（貨幣の限界効用が0となる）か、または第3図のように上に凸で r 軸と交わる場合には第1図の場合と反対に $-\bar{w}$ の値は r の増加とともに大きくなる。これらの場合には貨幣弾力性と限界効用は1対1の対応をするけれども、フリッシュはこのように $-\bar{w}$ の値が r の増加関数となることはあり得ないと主張している¹⁷⁾。この点は現実に \bar{w} を計測することによって明らかにすべきことであるが、常識的に考えても所得の限界効用が0となることはあり得ないと思われるから、これらの場合を排除してよいであろう。また第4図のように限界効用曲線に凹凸のある場合には $-\bar{w}$ の値が単調でなく、増減するので、 $-\bar{w}$ と限界効用の間の1対1の対応が存在しなくなる。したがって \bar{w} の等しいことは必ずしも限界効用が等しいことを意味しない。もちろんこの場合でも r の種々な値に対する \bar{w} の値を実際に計測してこれを $f(r)$ の形で表わせば、 \bar{w} を積分することによって効用関数を導くことができる。しかし多くの cardinalist たちは第1図の場合を前提として $-\bar{w}$ を r の減少関数と考え、 $-\bar{w}$ の値を所得の大小の尺度と見做しているようである。

そこで問題は貨幣弾力性の測定の方法にしばられる訳であるが、これについてはフリッシュが考案した等量法とよばれる方法がある。彼はこれをその初期の著書「純粋経済学の問題について」において発表し、つづいてこれを改良した他の幾つかの方法を第二の著書「限界効用測定の新方法」において発表している。これらの幾つかの方法は統計資料の適用の仕方の相違によるものであり、基本的には同じ理論に基づいているものであるから、等量法について簡単に説明する。

財 x の限界効用を $u(x)$, 名目所得を物価指数 P で割った実質所得を r , 所得の限界効用を $w(r)$, 財 x の価格を p とすれば, 次の関係が成立する。

$$u(x)/\frac{p}{P} = w(r)$$

$\frac{p}{P}$ は x の実質価格を表わす。いま $\frac{P}{p} = \alpha$ とおけば上の式は

$$\alpha u(x) = w(r)$$

となる。この式は r を x および α の関数として表わしている。この式から

$$\log w(r) = \log \alpha + \log u(x)$$

貨幣の弾力性は $\frac{d \log w(r)}{d \log r}$ で表わされるから, もし r が変化しても x が変化しない場合には

$$\frac{d \log w(r)}{d \log r} = \frac{d \log \alpha}{d \log r}$$

となって, α , r は何れも客観的に計測可能であるから, 貨幣弾力性 \tilde{w} も計測可能となる。 r と x との関係はエンゲル関数によって別個に与えられるが, エンゲル関数は $r = r(\alpha, x)$ の形となるから, x を一定とすれば α は r の関数となり, 上の式から \tilde{w} が r の関数として成立することが立証せられる。したがってこの場合の問題は x を一定とし α と r との関係を求める統計技術の問題に限られることになる。

これで効用計測の問題は理論的には解決したように見えるが実はここに一つの問題がある。それは x の限界効用を $u(x)$ とおいたことである。このことは x の効用が x のみの関数であって, 他の財の量とは独立であることを意味する。しかし一般には x の効用は x のみでなく他の財 y , z などの関数でもあるから, $u(x)$ の代りに $u(x, y, z, \dots)$ と置かねばならぬ。そうすると x, y, z, \dots などをすべて一定にして α と r の関係を求めるという統計技術上ほとんど不可能な問題に当面しなければならないし, またすべての財が一定であるとすれば, 実質所得 r も一定となり, $w(r)$ の弾力性を求めることができないという理論上の困難もある。

それのみでなく, エンゲル関数が

$$r = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, x, y, z, \dots)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ はそれぞれ x, y, z の実質価格の逆数

の形となるから、 α_1 は r のみでなく α_2, α_3 の関数ともなり、 $\frac{d \log \alpha}{d \log r}$ の値も確定しない。したがってこの場合すべての財の需要量と、 x 以外の財の実質価格に変化がないという仮定をおかなければならない。

このような困難を避けるためにはどうしても他の財と独立な財 x を選んで、これを媒介として効用を測定しなければならない。そこで起る問題は、効用の計測を前提としないで、どうしてある財の効用が他の財と独立であると判断できるかという問題である。

フリッシュは1959年の *Econometrica* No27 に効用の測定に関する新らしい研究を発表しているが、この中で彼は家計消費の対象となる財の少なくとも一つが他の財に独立であることを前提として、貨幣弾力性を算出する式を導き出している。そして彼はこの効用の独立性を判断するのに財の交差弾力性が0に第しいという基準を用いればよいと主張している。

いま第 i 財の需要量を x_i 、その価格を p_i とすれば第 i 財の需要の第 k 財の価格に対する交差弾力性はつぎの式で定義される。

$$x_{ik} = \frac{d x_i}{d p_k} \cdot \frac{p_k}{x_i}$$

ところで彼はある条件の下で x_{ik} は次のように書くことができると論じている。

$$x_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \cdot \frac{u_k}{x_i}$$

ここに u_k は第 k 財の限界効用を表わす。したがって $x_{ik} = 0$ であることは第 k 財の効用の変化が第 i 財の需要に影響のないことを意味し、したがって i 財と k 財は独立である。そのある条件というのは貨幣の限界効用が一定ということである⁽⁸⁾。

貨幣の限界効用が一定であれば w の値は0となり、貨幣弾力性を改めて計測する必要はない。しかるに貨幣弾力性を測定するためには効用が独立である財を選ぶ必要があり、効用の独立性を判定するために貨幣の限界効用を一定と仮定することは、目的と矛盾した仮定を置くことになる。

効用の独立性を判定するのに他の方法があれば問題は解決することになる。つぎの節で効用測定の理論的基礎を吟味しよう。

注

- (1) 分配理論と効用測定との関連については次の論文を参照されたい。

村上雅子, 分配の公正に関する経済理論: 展望, 理論経済学, Vol. 25, 1974.

筆者のこの論文執筆に関連して, 参考資料について村上教授の助力を得たことを付記する。

- (2) Ragnar Frisch. *Sur un problème d'économie pure*. 1926. p. 184

- (3) J.von Neumann and O.Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. 1943. pp. 15-31.

- (4) たとえばつぎのような研究がある。

M.Friedman and L.J.Savage. "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *J. P. E.* 1948. Aug.

H.Markowitz. "The Utility of Wealth," *J. P. E.* 1952. Apr.

R.Eisner and R.Strotz. "Flight Insurance and the Theory of Choice." *J. P. E.* 1961. Aug.

R.Schlaifer. *Analysis of Decisions under Uncertainty*. 1969.

- (5) たとえばつぎのような研究がある。

R.Frisch. "A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors," *Econometrica*. 1959. Jan.

——. Dynamic Utility. *Econometrica*. 1964. July.

C.Clark. "The Marginal Utility of Income," *Oxford Economic Papers*. 1973. July

W.Fellner. Operational Utility. The Theoretical Background and a Measurement. *Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher*. 1967.

S.Maital. "Public Goods and Income Distribution: Some Further Results," *Econometrica*. 1973. May

- (6) R.Frisch. *New Methods of Measuring Marginal Utility*. 1932. p. 15

フリッシュ自身はこの弾力性という名称の代りに可撓性 (flexibility) という用語を用い, 可撓性の逆数を弾力性と呼んでいるが, ここでは最近の一般的な用法に従って弾力性の名称を使用した。

- (7) 上の注(5)に掲げた Frisch の初の論文の p. 189 注(9)を参照。

- (8) Frisch の同上の論文の p. 184 参照。

2. 効用測定の論理的基礎

効用の測定の前提として独立財の存在が必要であることをフリッシュの所論に関連して述べたが, 独立財を用いれば効用の測定が可能である

ことを論証した古典的な学説としてフィッシャーの学説が挙げられる。⁽¹⁾ いまここにフィッシャーの学説を紹介することは省略するが、ここで問題となるのは効用の測定可能性を前提としないで、独立財をどうして定義し得るかということであり、フィッシャーはこの問題については全く触れていない。

財Aの量が a であるときの増分 Δa の効用が財Bと独立であるということとは、消費量が (a, b) であるときの Δa の効用と、消費量が (a, b') (ただし $b' \neq b$) のときの Δa の効用とが等しいということであり、いいかえれば財空間 (a, b) における財の増分 Δa と (a, b') における財の増分 Δa とを比較して両者の価値を同一と判断することである。効用理論は財の選択行為を通じて効用の大小を規定しているが、このような財空間の異なる点における財の増分は選択の対象とならないと考えるのが普通であるから、選択行為を前提とする効用の定義からは独立財を定義することは困難である。しかし何等かの方法によって異なる点における財の増分の価値の比較が経験的に可能であるとすれば独立財を客観的に定義することも可能となる。

2財の効用がたがいに独立であるときは、2財の組合せの効用は各財の効用の和に等しいことを容易に証明することができる。いま財A, Bの組合せ (a, b) の効用を $U(a, b)$ とする。独立性の仮定によってAの限界効用は a のみの関数となる。

したがって $\frac{dU}{da} = \phi(a)$ 。これを積分すれば

$$\begin{aligned} U(a, b) &= \int \phi(a) da + C \quad (C \text{は任意定数}) \\ &= A(a) + C \end{aligned}$$

いま $a=0$ とおけば $A(a)=0$ となるから

$$U(0, b) = C$$

したがって C を $B(b)$ とおくことができる。 $A(a)$, $B(b)$ はそれぞれ a の効用, b の効用を表わす。上の関係から

$$U(a, b) = A(a) + B(b)$$

逆に効用の加法性が成立するときは効用が独立であることは自明であるから独立性と加法性とは異語同義である。したがって何等かの方法で効用の加法性を立証することができれば効用の可測性を根拠づけることができる。

効用の可測性を証明するもう一つの方法として限界効用逓減の法則を経験上自明の事実として承認するという方法がある。いま効用を単なる序数と考え、財 $x_1 \cdots x_n$ に対する序数的効用の一つを $U(x_1 \cdots x_n)$ とすれば、すべての効用指標は $U(x_1 \cdots x_n)$ の単調変換によって得られるから、これを $F(U)$ で表わすことができる。 F は単調変換関数を表わす。いまこの関数を用いて限界効用逓減の法則を表わせば、財 x_i に対する限界効用は $F' \cdot \frac{dU}{dx_i}$ であるから

$$F'' \frac{dU}{dx_i} + F' \frac{d^2 U}{dx_i^2} < 0$$

となる。単調変換により $F' > 0$ である。 $\frac{d^2 U}{dx_i^2}$ の符号はこの法則を認める以上は負でなければならぬ。しかし F'' は変換関数の形によって正とも負ともなり得るから、上の不等式が常に成立するためには変換関数の形を制限しなければならない。これは部分的にせよ効用が単なる順序数ではなく、順序の定め方に制約があることを意味するから、いわば準基数的な性格をもつことになる。 $F'' = 0$ とすれば変換は1次変換となり効用は完全に基数として定義せられる。

限界効用逓減の法則もこれを吟味すれば、財空間の異なる点における効用の比較を認めることになる。財の量が x のときの Δx の効用と、 $x + \Delta x$ のときの Δx の効用とを比較して後者が前者より小さいと判断することが限界効用の逓減であるからである。なおこの法則を承認するだけでは財の効用の完全な可測性を証明することができない理由は、この法則では同一財の増分を比較するだけであるから、これによっては独立財の存在を証明することができないこと、およびこの法則では効用の大小関係を判定するだけであって、効用が等しい関係を確定することができない

から、効用の尺度を決定し得ないことによるものである。

以上の検討によって効用を測定可能な量として定義するためには、独立財の存在、または加法的な効用の存在、あるいは効用関数の1次変換の可能性を単なる仮定としてではなく経験的に実証する必要があることが分った。このことは決して不可能なことではなく、実際にそのような試みが行なわれた例をつぎに掲げたい。

効用の独立性を利用した例としてはマッシャルの効用概念を挙げることができる⁽²⁾。マッシャルはある財に対してその個人が支出を承諾する最大の貨幣額でその個人のその財に対する効用を測っている。この測り方は極めて素朴で常識的に見えるが、私の解釈によればこれは十分に論理的に解明できる定義である。一般に一定量の貨幣の効用はその貨幣を用いて最大の効用を得るような財の組合せに基づいて決定せられるが、実際にある財の効用を測定しようとする場合は、必ずしもその財が他の諸財と最適結合の状態にあるとは限らない。したがってこの場合測定の尺度として用いられる貨幣の効用と測定せられる財の効用とは異なる財の組合せに基づいて決定せられるものであり、その効用はたがいに独立なものである。たとえば財A、Bがそれぞれ最適結合 (a, b) にあったとして、Aの増分 Δa を評価するのに、財 $(a + \Delta a, b)$ に支出してもよいと思う貨幣額と、財 (a, b) に支出してもよいと思う貨幣額の差で Δa を評価するというのがマッシャルの方法である。この場合 $(a + \Delta a, b)$ に支出しようとする貨幣額 M の効用は実はこの貨幣額で購得する財の最適結合 (a', b') の効用に等しいから、財空間の点の比較として見れば点 (a, b) と点 (a', b') を比較していることになる。ただこの場合問題となることは Δa の大きさが変るにしたがって (a', b') が移動するということである。したがってこの方法による効用の測定は近似的には成立するとしても厳密なものではない。

効用の相加性を利用した例としては、サムエルソンの初期の論文がある⁽³⁾。この場合に問題となるのは個々の財の効用ではなく、貨幣所得の効

用である。各個人は任意の特定の期間において将来の効用の総和を最大ならしめるように行動すると仮定せられる。この仮定の中に異なる時点における効用を加算できること、すなわち効用の加法性が仮定せられており、これが経験上自明のこととして承認されておるのである。

貨幣所得を x とし、 t 時間後における x の効用を現在時点で割引した値を $V(x, t)$ とすれば、個人は

$$T = \int_0^b V(x, t) dt$$

を最大にするように行動する。ただし 0 は現在時点、 b は特定の任意期間の終期である。効用の割引率を π とすれば、 $V(x, t)$ は次の式で与えられる。

$$V(x, t) = U(x(t))e^{-\pi t}$$

いま瞬間利率を r とすれば、この特定期間の所得の現在価値は

$$S = \int_0^b x(t)e^{-rt} dt$$

で表わされる。一定の所得 S から T を最大にする条件を求めると

$$U'(x) = \lambda e^{(\pi-r)t}$$

となる。 λ はラグランジ乗数である。所得 x を t の関数として表わす $x(t)$ から、 t を x の関数として表わすことができるから、上の式から効用関数 $U(x)$ を確定することができる。

この分析はある期間の総効用を最大にするように、所得の現在価値が一定の範囲で所得の時間的分布 $x(t)$ を操作し得ることを前提としている。しかし実際にはこのような操作は可能ではないので、この方法を効用の計測に用いることはできない。実際に可能なのは貯蓄と消費の操作によって総効用を最大にすることであって、このことを前提として効用計測の方法を述べたのが後に述べるフリッシュの新しい研究である。

効用の相加性を利用したいま一つの例としてノイマンとモルゲンシュテルンの理論がある⁽⁴⁾。彼等の理論を紹介することは省略するが、その要点だけ述べればつぎのとおりである。二つの排反事象 A 、 B がそれぞれ

α と $(1-\alpha)$ の確率で起るとき、A の効用を u とし、B の効用を v とすれば、A の効用の期待値は αu であり、B の効用の期待値は $(1-\alpha)v$ である。A、B は排反事象であるから、この二つの効用は独立であると考えてよい。したがって A、B の結合事象の効用、すなわち A か B の何れかが起ることの効用はこの二つの効用の期待値の和すなわち $\alpha u + (1-\alpha)v$ に等しい。

すでに述べたように効用は単調変換が可能である。結合効用に単調変換を施したものは、A、B 各効用に同じ単調変換を施したものの和に等しいはずである。そこでこの変換関数を V とすればつぎの関係が成立する。

$$V[\alpha u + (1-\alpha)v] = \alpha V(u) + (1-\alpha)V(v)$$

ノイマンたちはこの式から V が 1 次関数に外ならぬことを示すことによって、効用が計測可能であることを証明している。変換関数を 1 次式に限定すれば効用が計測可能になることは、すでに限界効用逓減の法則に関連して述べたことである。変換関数が 1 次式であることを保証する条件が効用の加法性であり、この加法性は確率を伴う排反事象については明らかに成立すると考えられる。

以上によって、効用が計測可能であるための論拠として、効用の独立性、加法性または 1 次変換の可能性の何れか一つが保証せられること、およびそれらの根底となる前提としては財空間の異なる点における財の増分の比較が可能であることを明らかにし得たと思う。効用測定の可能性はこのような前提を満足するような経験的事実が得られるか否かにかかっている。そのような探究の一部を本節に紹介したが、次節にこのような探究の新しい試みの 2、3 を紹介し論評を試みたいと思う。

注

- (1) 久武訳. フィッシャー. 価値と価格の理論の数学的研究。(原著 1892) pp. 4-8
- (2) A. Marshall. *Principles of Economics*. 8th. ed. pp. 92-95
- (3) P. Samuelson. "A Note on Measurement of Utility," *Review of Economic Studies*.

(4) 前節注(3)参照。

3. 効用測定の若干の事例

ノイマンたちの方法による効用の測定については理論的にはその可能性が証明されており実測の資料および方法に関する問題が残されているだけであるといつてよい。しかしフリッシュたちの方法に沿う、リスクを含まない効用の測定については独立財の定義あるいは効用の加法性という前提条件を如何に確立するかという問題が残されており、これについての理論的研究がいまだに続けられている。ここでは比較的新らしく、かつ注目すべき研究の2, 3について、この問題がどのように解決されているかを吟味したい。

まずフリッシュ自身がこの問題の展開を試みた2つの論文を取り上げよう。その1つは次の論文である。

"A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors." *Econometrica* 1959. Jan.

この論文の本来の目的は家計調査による各種費目の支出比率とエンゲル弾力性を用いて財の価格弾力性を測定することができることを立証し、この方法によって価格弾力性の計算が統計資料の利用という見地から著しく容易になることを示すことにある。彼はこのことが家計費目に対する欲望が互いに独立であることを前提とすることによって解決できることを明かにしている。貨幣弾力性を測定することはこの論文の本来の目的ではないが、上記の前提条件が満たされれば貨幣弾力性の測定が可能となるので、理論的にはこの論文は貨幣弾力性測定に関する研究といつてよく、また彼はエンゲル弾力性を用いて貨幣弾力性を算出する式を導き出している。

フリッシュはこれらのことを証明するために欲求の弾力性という概念を用いる。いま家計消費の対象となる2つの財の量（実際には金額で表

示する)を x_i, x_k とし、限界効用をそれぞれ u_i, u_k と表わせば、第 k 財に対する第 i 財の欲求弾力性とは、第 k 財に対する欲求が増大した割合に対し第 i 財への需要が増加する割合を指し、これを x_{ik} で表わせば、 x_{ik} はつぎの式によって定義せられる。

$$x_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \frac{u_k}{x_i} \quad \left(\begin{matrix} i=1 \cdots n \\ k=1 \cdots n \end{matrix} \right) \quad (1)$$

フリッシュはこの x_{ik} が0に等しいときに第 i 財と第 k 財は独立であると定義している。しかし彼自身も指摘しているように、 x_{ik} は効用関数 $u(x_1, \dots, x_n)$ の単調変換に関して不変ではない。いま単調変換関数を F とし、 u の代りに $F(u)$ を用いれば x_{ik} はつぎのようになる。

$$x_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial F_k} \frac{F_k}{x_k} = \frac{\partial x_i}{\{F''(u)(u_k)^2 + F'(u)u_{kk}\} \partial x_k} \cdot \frac{F'(u) \cdot u_k}{x_k}$$

もし $F''(u)=0$ であれば、この式は変換以前の x_{ik} の式と一致する。しかし $F''(u)=0$ が保証せられない一般の場合においては x_{ik} は効用関数の変換によって影響を受ける。したがってこれを用いて独立財を定義することも不可能となる。逆にいえば x_{ik} がもし確定値をとるとすれば、それは $F''(u)=0$ を意味し、したがって変換関数は1次式に限定せられ、効用の測定が可能となるのである。

フリッシュはつぎのように述べて、この x_{ik} が経験的に確定することを主張している。まず彼は欲求弾力性は直観的に把握しやすい概念であると述べているが、さらにこれを支える根拠として、もし貨幣の限界効用 \bar{w} を一定とするならば x_{ik} は次の式で表現できると論じている。

$$x_{ik} = \frac{d x_i}{d p_k} \cdot \frac{p_k}{x_i} \quad (2)$$

彼はこれを複雑な仕方では証明しているが、これは簡単に衆知のつぎの式から証明せられる。

$$\frac{u_i}{p_i} = \frac{u_k}{p_k} = \bar{w}$$

\bar{w} を一定とすれば $\partial u_k : \partial p_k = u_k : p_k$ が成り立つから、これから直ちに(1)が(2)の形に変形できることが分る。

x_{ik} を(2)のように表わせば x_{ik} は第 i 財の需要の k 財の価格に対する弾力性に等しくこれは客観的に計測し得る量である。しかし問題は \bar{w} を一定と見做し得るかどうかということであり、これについての疑問はすでに第1節で述べた。また(1)の形の x_{ik} が直観的に自明であるとする立場はたとえば限界効用が10%増大するということをどうして計量し得るかという問題に当面し、限界効用が直観的に測定できるという立場と本質的に異なるところはない。フリッシュのこの論文は効用の可測性について新しい解決を与えていないといって差支えない。

フリッシュのもう一つの研究はハロッドが1962年にオスロー大学で行なった講演に刺戟されて、その結果をさらに一般化したものであり、つぎの論文に発表されている。

“Dynamic Utility,” *Econometrica*. 1964. July. したがってこの研究の基本的な着想はハロッドによるものであるが、以下ではフリッシュの理論を対象として論評を加えたい。

以下式の番号は原文の番号を採用する。記号は原文と多少異にしている。代表的個人の所得を Y ，その効用を

$$(1) \quad U(Y)$$

とおく。所得の限界効用を

$$(2) \quad U'(Y) = w(Y)$$

で表わす。貨幣弾力性は

$$(3) \quad \bar{w}(Y) = \frac{dw}{w} / \frac{dY}{Y} = \frac{dw(Y)}{dY} \cdot \frac{Y}{w(Y)}$$

である。

所得 Y は時間 t の関数であるから、これを Y_t で表わす。所得の成長率を g_t (g_t は一定でなくてもよい) とすれば

$$(6) \quad \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = 1 + g_t$$

(1)~(3)の関数は一般的にいえば t の関数となる。これを瞬間的関数と名付け、それぞれ

$$(7) \quad U_t(Y), w_t(Y), \tilde{w}_t(Y)$$

で表わす。

瞬間的関数と区別して、 t 期からみた s 期度における所得効用関数を $U_{s/t}(Y)$ で表わし、同様に $W_{s/t}$, $\tilde{W}_{s/t}$ を定義する。これらの関数を予想的関数と名付けることにする。

いま t 期の効用と $t+1$ 期の効用を比較して $t+1$ 期の効用を t 期における効用に換算するための割引率を π_t とすれば

$$(9) \quad \frac{U_{t+1/t}(Y)}{U_t(Y)} = 1 - \pi_t$$

この代表的個人は t 期において Y_t の中から貯蓄する割合を s とし、これに対し r_t の割合の利息が付加されるものとし、かつ $t+1$ 期においては貯蓄を行なわないものとすれば、 t 期および $t+1$ 期における消費額はつぎのようになる。

$$(11) \quad t \text{ 期} \quad (1-s) Y_t$$

$$t+1 \text{ 期} \quad [1+g_t + (1+r_t)s] Y_t$$

この個人は t 期において予想せられる t 期および $t+1$ 期の総効用を最大にするように貯蓄率 s を決定するであろう。すなわち

$$(12) \quad \text{Max}_s \{ U_{t+1}([1+g_t + (1+r_t)s] Y_t) + U_t[(1-s) Y_t] \}$$

(12) を Y_t の近傍で第 2 次の項まで展開し

$$(13) \quad w_t(Y_t) \cdot Y_t \neq 0$$

を仮定するならば(12)のための 1 階条件は

$$(14) \quad \{-1 + (1-\pi_t)(1+r_t) + \tilde{w}_t(Y_t) g_t(1+r_t)(1-r_t) \\ + s[1 + (1-r_t)(1+r_t)^2] \tilde{w}(Y_t) w(Y_t) Y_t = 0$$

となる。

そこで問題は(14)を満足するような s の値を決定すると同時に、平均人については貸借が均衡しなければならぬという意味でこの s が 0 となる

るように利率 r_t を決定することである。

$s = 0$ を仮定すれば(14)は

$$-1 + (1 - \pi_t)(1 + r_t) [1 + g_t \tilde{w}_t(Y_t)] = 0$$

となる。これから r_t を求めると

$$(17) \quad \hat{r}_t = \frac{\Delta_t}{1 - \Delta_t}$$

$$\text{ただし } \Delta_t = 1 - (1 - \pi_t) [1 + g_t \tilde{w}_t(Y_t)]$$

となる。 \hat{r}_t は貸借を均衡せしめるような利率、フリッシュの命名によれば無刺戟の利率である。この \hat{r}_t を何等かの方法で確定することができれば(17)から \tilde{w}_t を決定できるというのがフリッシュの主張である。

フリッシュはこの方法で \tilde{w} を測定した実例を3つ挙げており、それらはノールウェイ、イギリス、オランダの資料に基き、それぞれ別の学者によって測定せられたものであるが、何れの場合もその値が2に近いことを指摘している。なおこの場合問題となるのは π_t と \hat{r}_t の測定法であるが、前者については面接調査で測定できるとしている。後者については記していないが、貸借が均衡する利率であるから、金融市場を安定させるような利率を指しているのであろうと思われる。

フリッシュのこの方法に対して疑問がないわけではない。たとえば t 期において貯蓄をし、 $t+1$ 期においてこれを消費するという仮定は、期間の単位を長くすれば個人の行働については大体当てはまるであろう。(12)または(14)で考えられている社会的平均人はこのような個人を代表しているものと考えてよい。しかし(14)において $s = 0$ とにおいて(17)を導き出す場合に考えられる社会的平均人はこのような個人ではなく、一方においては貯蓄をする個人があり、他方においては過去の貯蓄を消費する個人があるような社会を代表する平均人であるから、前者のような未来志向的な行働をとる平均人ではない。その結果として(14)と(17)との連続性が失われるのではないかという疑問が生ずる。また $s = 0$ となるような社会は静態的社会であると考えられるから、 $s = 0$ を仮定しながら成長率

を適用することの当否も問題となるであろう。

このハロッド・フリッシュの動学的効用測定法は前節に掲げたサムエルソンの初期の論文における構想と本質的には同じである。それは異時点における効用の加法性を前提としており、利率と割引率を用いて所得の効用の現在価値を最大ならしめる式から効用測定の根拠を求めている点で方法的にも同じ型に属する。しかしフリッシュの新しい方法では、貯蓄率のような操作可能なパラメーターを変数に用いていることで前者の欠点を改善した方法であるということが出来る。上に疑問点として指摘したような問題があるとしても、今後の研究によって改善せられるであろうし、効用測定の有力な方法であるということができよう。

加法性に関して注目すべき研究がハウタッカー (H. S. Houthakker) によってなされている。これはフリッシュの65才を記念して特集されたエコノメトリカに掲載されたつぎの論文である。

Additive Preferences. *Econometrica*. 1960. April. 彼は効用関数を直接効用関数と間接効用関数とに区別する。直接効用関数とは、財の量を $x_1 \cdots x_n$ とするとき $U(x_1 \cdots x_n)$ で定義せられる普通の効用関数である。間接効用関数とは同じ効用を財の量の代りに、総支出 M と財の価格 $P_1 \cdots P_n$ の関数として表示したものである。総支出と各財の価格を与えれば均衡条件によって財の量を決定することができるからである。

間接効用を $\Psi(p_1, \cdots, p_n, M)$ と表わせば、これは明らかに $p_1 \cdots p_n, M$ に関して0次同次であるから

$$\begin{aligned}\Psi(p_1, \cdots, p_n, M) &= \Psi\left(\frac{M}{p_1}, \frac{M}{p_2}, \cdots, \frac{M}{p_n}\right) \\ &= \Psi(z_1, z_2, \cdots, z_n)\end{aligned}$$

が成立する。 z_1 は M を x_1 にのみ支出した場合の消費量を表わす。このように間接効用を定義した上で、彼は間接効用の加法性が成立する場合の条件を導き出し、この条件が客観的に確定できることを立証した上で、直接効用の加法性と間接効用の加法性との関係を考察し、特殊の条件の

下においては両者が一致することを述べている。この特殊の条件というのはすべての財のエンゲル曲線が直線となるということであって、現実には確保し難い条件であるが、理論的には客観的に識別できる条件である。

しかし彼の説に対する疑問は理論の面からも提出できる。彼の理論を詳細に紹介することは省略するが、彼は間接効用の加法性が成立するための必要十分な条件としてつぎの式を導き出している⁽¹⁾。

$$E_{ik} = \frac{p_k^2}{M} \cdot \frac{\Psi_{kk}}{\Psi_M} - d_k \quad (i \neq k)$$

E_{ik} は第 i 財の需要の第 k 財の価格に対する弾力性、 Ψ_{kk} は間接効用の z_k についての第 2 次導関数、 Ψ_M は貨幣の限界効用、 d_k は $\frac{p_k x_k}{M}$ 、すなわち第 k 財への支出比率を表わす。この条件から、間接効用の加法性が成立するときは E_{ik} は第 k 財の量（この場合は z_k ）のみの関数であって、第 i 財の量 z_i には無関係であることは明らかである。このことから、彼は次のことを定理として掲げている。

任意に選んだ一定財の価格に対する交差弾力性がすべての財について等しいときは、そしてこの場合にのみ、間接効用は加法性を有する。

この定理は上の必要十分条件をそのまま用いないでこれを拡張して用いているように見える。すなわち、上の条件から「任意に選んだ一定財の価格に対する交差弾力性がすべての財について等しい」ことは帰結できるが、その逆は一般には成立しないから、この「」の中で示した条件は加法性の必要条件ではあっても十分条件とはいえないのではないかというのが私の疑問とするところである。上の条件式は Ψ_{kk} や Ψ_M のように客観的に観察できない数値を含んでいるので、この条件を客観的に確認することは本来不可能ではないかと思われる。

フリッシュの方法を踏襲したものにフェルナー (Willam Fellner) のつぎの研究がある。

Operational Utility: The Theoretical Background and a Meas-

urement. *The Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher*. 1951.

彼はこの論文において効用測定の方法にフリッシュの方法とノイマンたちの方法があることを述べ、それぞれの方法について彼自身が工夫した測定の方法を掲げ、両者の方法によって測定した効用の関係について簡単に触れ、最後にフリッシュの線に沿った方法による実際の測定の事例を掲げている。

彼はフリッシュの方法に従いながらさらに簡単な計算式を導いている。彼の導いた式は彼の論文の(10)式、すなわちつぎの式である⁽²⁾。

$$\lambda(\bar{Y}) = \frac{\bar{P}_1/\bar{P}_x}{\bar{P}_1/\bar{P}_x}$$

λ は所得の限界効用、 \bar{Y} , \bar{Y} は同一社会に属する異なる集団たとえば2つの都市の平均実質所得、 \bar{P}_1 , \bar{P}_1 は財 x たとえば食物のそれぞれの集団における価格、 \bar{P}_x , \bar{P}_x はそれぞれの集団における物価指数である。またこの場合 $\lambda(\bar{Y})=1$ と仮定されている。

彼はこの方法がフリッシュが採用した方法より少ない仮定に依存しているのでより優れた方法であると自負している。フリッシュの最初の研究においては砂糖を独立財と仮定し、第2の研究においては食料消費を独立財と仮定している。またこの第2の研究において使用されたアメリカの諸都市の家計調査について都市間の欲望の差はないと仮定されている。フェルナーの式においてはこれらの仮定による困難は除去され、あるいは軽減されていると主張している。

はたしてそうであろうか。フェルナーは上の式の誘導の方法を説明していないが、上の式は貨幣の限界効用が財の実質価格に逆比例することを説明している。いまフリッシュの記号を用いてこのことを証明するとつぎのようになる。

財を x 、その価格を p 、実質所得を r 、財の限界効用を $u(x)$ 、貨幣の限界効用を $w(r)$ とすればつぎの関係が成立する。

$$u(x)/\frac{p}{P} = w(r)$$

A群とB群の実質所得を r_1 , r_2 , x 財の消費量を x_1 , x_2 , x 財の価格を p_1 , p_2 , 物価指数を P_1 , P_2 とすれば, 上の式からつぎの関係が導かれる。

$$\frac{u(x_2)}{u(x_1)} \cdot \frac{p_1/P_1}{p_2/P_2} = \frac{w(r_2)}{w(r_1)}$$

もし $x_1 = x_2$ であれば, $w(r_1) = 1$ とおけばこの式はフェルナーの式と一致する。このことは x が独立財であれば可能であり, この場合は問題はこれに適合する統計資料が得られるかどうかにかしぼられる。しかし x が独立財でないとすれば, $u(x) = \frac{\partial U}{\partial x}$ となるから, $u(x)$ の大きさは x のみでなく他の財の関数となる。他の財の消費量を動かすことなく, $x_1 = x_2$ とおけば $r_1 = r_2$ となるからフェルナーの式は意味を失うことになる。さらに上の証明の過程で明らかなように, A群とB群とにおいて関数 $u(x)$ および $w(r)$ は共通のものと仮定しているので, この点においてもフェルナーの式はフリッシュの式と同じ仮定に基づいているといわねばならぬ。

フリッシュの等量法を採用する場合にどうしても避けられないのは独立財を定義することである。ハウタッカーが述べているように, 財を比較的大きな項目にまとめて, たとえば食料, 衣料というようにグルーピングをすれば, それらの財の関係は独立と考えてよいということは直観的には理解できることである⁽³⁾。もしこのような直観的理解を出発点とすることが許されるならば, 効用測定の問題は解決されることはこれまでの論議が示すとおりである。これは厚生経済学あるいは公共経済学を建設する一つの道であろう。実際に社会的厚生, あるいは公共の福祉という概念に上の直観的理解以上の厳密さを要求することは無理な注文というべきであろう。

もう一つの方法はフリッシュの「動学的効用」に示されたように, 消費の時間的調整を通じて効用を測定するしかたである。この方は独立財の定義という困難を避けられるが, 方法としては未完成であり, 解決すべきいろいろの問題を含んでいる。しかし今後の発展を期待し得る一つ

の方法といってよい。

また本論では触れなかったが、ノイマンの方法を利用して国民所得の効用を測定することも、所得階層別にリスクに対する反応の仕方を調べることによって効用を測定することが理論的には可能であり、その実際の測定の成果は今後に期待される。

その外にも効用測定の可能な方法があるかも知れないが、その理論的基礎としては、独立性、*加法性または単調変換の可能性の何れかに帰着することはこれまでの成果によって明らかであろう。

注

- (1) *Econometrica*. 1960. April. p.250.
- (2) *Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher*.1951. p.49
- (3) *Econometrica*. 1960. April. p.246.